Emelt szintű feladatsor (Orosz Gyula)

I. rész (4 feladat, 51 pont):

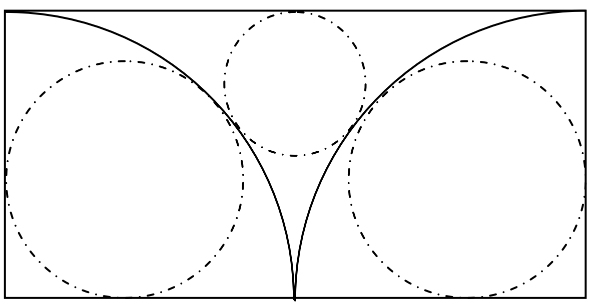
1. feladat (12 pont): Az alábbi táblázatban 1990 és 2002 közötti néhány évben a különböző típusú oktatási intézményeket elvégzett diákok számát tüntettük fel.

Végzettség (ezer fő)	1990	1999	2001	2002
8 évfolyam	172,9	119,1	119,3	118,8
gimnáziumi érettségi	27,3	36,3	38,0	40,2
szakközépiskolai érettségi	40,6	53,3	50,9	50,2
felsőfokú oklevél	24,1	42,3	47,4	50,5

a) Hány tanuló szerzett középiskolai érettségit az egyes években? (2 pont)
b) Az összes végzettséget szerzett tanulóknak ez hány százaléka volt? (2 pont)
c) Határozzuk meg az alap- és felsőfokú végzettséget szerzett diákok százalékos arányát is! (4 pont)
d) A középiskolai érettségit kapó diákok körében mekkora a gimnáziumi, ill. szakközépiskolai érettségit szerzettek százalékos aránya? (2 pont)
e) Milyen tendenciák figyelhetők meg a táblázat alapján? (2 pont)

2. feladat (13 pont): Adott a valós számok halmazán értelmezett két függvény: $f(x) = 1{,}5x^2 + 3x - \frac{7}{2}$, $g(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{5x-2}{9} + 1$. Oldja meg az $f(x) \geq g(x)$ egyenlőtlenséget!

3. feladat (13 pont): Egy középkori gótikus katedrális építőmesterei a 2 méter x 1 méteres, téglalap alakú ablakkeretekbe két, negyedkör alakú ablakelemet terveztek (az 1 méter sugarú negyedkörök érintkeznek, középpontjaik a téglalap csúcsaival esnek egybe). Az építtető kérésére további három kör alakú díszítőelemet is be kellett építeniük minden ablakba úgy, hogy ezek érintkezzenek az eredeti ablakkerettel, ill. a negyedkörökkel. (Az ábrán szaggatott vonal jelöli a három díszítőelemet.)



Mekkora sugarúak a díszítő körök?

4. feladat (13 pont): A kutatók egy baktériumpopuláció egyedszámának változását három órán keresztül vizsgálták, s úgy találták, hogy ebben az időszakban a populáció méretét közelítőleg az $f(t) = 10^7 - 10^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$ függvény írja le. (Az időt órában mérjük.)

a) Mi a függvény értelmezési tartománya és értékkészlete? (4 pont)
b) Ábrázoljuk az így kapott függvényt! (2 pont)
c) Azonos ütemű növekedést feltételezve mennyi volt a populáció egyedszáma a megfigyelés kezdete előtt 3 órával? Ettől az időtől számítva mennyi idő alatt kétszereződött, majd négyszereződött meg a baktériumok száma? (5 pont)
d) Mennyi idő múlva éri el a $0{,}99 \cdot 10^7$, ill. a $0{,}999 \cdot 10^7$ nagyságú egyedszámot a populáció? (2 pont)

II. rész (4x16 pont):

Az 5. - 9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, az ötödik sorszámát írja be a 2. oldalon az üres négyzetbe!

5. feladat: A kisiskolás András munkafüzetében egy háromszög alakú ábra van, amelyet el akart takarni egy másik ábrával. Úgy tervezte, hogy a másik ábrát kör alakúra készíti, kivágja papírból és az első ábrára ráragasztja úgy, hogy azt éppen teljesen eltakarja. Sajnos András nem tudta megszerkeszteni a fedőkört, mert nem sikerült kiszámolnia a sugarát. Segítségül hívta hát középiskolás bátyját, Bélát, aki a háromszög alakú ábra két oldalát és a közbezárt szöget megmérte, s eredményül 10 cm-t, 12,5 cm-t és 42°-ot kapott.

a) Legalább mekkora sugarú körlemezt kell Andrásnak készítenie? (8 pont)
b) Béla szórakozásképpen kiszámolta azt is, hogy a háromszög alakú ábrával legfeljebb mekkora sugarú kör alakú ábrát lehet teljesen eltakarni. Nos, mekkorát? (8 pont)

6. feladat: Egy könyvsorozat 10 különböző könyvét rendezzük el - a borítójuk színe szerint csoportosítva - a könyvespolcon. A könyvek borítója közül 4 piros (ill. valamelyik színárnyalata), 3 kék, 3 pedig világosabb színű (sárga, fehér).

a) Hányféleképpen rendezhetjük el a könyveket? (2 pont)
b) Hányféleképpen rendezhetjük el a könyveket, ha az azonos színűeket (ill. színárnyalatúakat) egymás mellé kívánjuk helyezni? (3 pont)
c) Hányféleképpen rendezhetjük el a könyveket, ha előre a világos színűeket, utána a kékeket, végül a pirosakat tesszük? (3 pont)
d) Hányféleképpen rendezhetjük el a könyveket úgy, hogy két piros ne kerüljön egymás mellé? (5 pont)
e) Hányféleképpen rendezhetjük el a könyveket úgy, hogy három (előre kijelölt) könyv egymás mellé kerüljön? (3 pont)

7. feladat: Határozzuk meg a k: $x^2 + y^2 - 16x - 36y + 75 = 0$ egyenletű körhöz a P(21; 6) pontból húzható érintők egyenletét!

8. feladat: Tekintsük az $x^3 - 3x - p = 0$ egyenletet!

a) Határozzuk meg a p paraméter értékét, ha az egyenlet egyik gyöke 2! Mennyi ekkor a többi gyök értéke? (5 pont)

b) Melyek azok a p értékek, amelyekre egyetlen megoldása van az egyenletnek? (11 pont)

9. feladat: Szemestakarmány tárolására fémből egy tartályt készítenek. (A tartály alakja csúcsával lefelé fordított, felül nyitott, alul pedig nyitható tetraéder.) A tetraéder oldalélei egyenlő hosszúak, alapja pedig olyan derékszögű háromszög, melynek befogói 3 m és 4 m hosszúak.

a) Milyen magas a tartály, ha 10 m^3-nyi a térfogata? (4 pont)

b) Milyen hosszúak az oldalélek? (7 pont)

c) Mekkora a tartály előállításához szükséges fém mennyisége (térfogata), ha a tartály oldalai 1 cm vastagok? (5 pont)