MATEMATIKA EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI FELADATSOR

- A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
- A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
- A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe! Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor az utolsó feladatra nem kap pontot!
- A feladatok megoldásához zsebszámológépet és négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
- A feladatok megoldásához alkalmazott gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!
- Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetőek legyenek!
- A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasság-tétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania; elég csak a tétel megnevezését említeni, de alkalmazhatóságát röviden indokolni kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában alkalmazhatóságát indokolja.
- A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
- A feladatok megoldását tollal készítse! Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető!
- Az egyes feladatokra az ott feltüntetett pontszámnál több nem kapható.
- Ha a megadott válasz hibás elemet vagy elemeket tartalmaz, akkor maximális pontszám nem adható.

Feladatsor

Összeállította:
Pataki János-- Fazekas Mihály Gimnázium

I. rész

1. **a)** $A = 101^{100^{99}}$, $B = 99^{100^{101}}$. Melyik szám a nagyobb, *A* vagy *B*?

7 pont		

b) Írja föl az $f(x) = x^2$ függvény azon érintőjének az egyenletét, amelyik az x-tengely pozitív félegyenesével $60°$-os szöget zár be.

6 pont		

2. Hol a hiba az alábbi okoskodásokban? Mi az egyenlet megoldása az **a)** esetben és mennyi a szóban forgó valószínűség a **b)** kérdésben?

a) A $\sqrt{x} = -x$ egyenletnek nincs megoldása, mert egy szám négyzetgyöke nem lehet negatív.

4 pont		

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy hét szabályos kockát feldobva van 1-es a kijött számok között? Annak a valószínűsége, hogy egyetlen szabályos kockával 1-est dobunk, 1/6. Eszerint annak a valószínűsége, hogy két szabályos kockát feldobva van 1-es a kijött számok között, kétszer ennyi, 1/3; így tehát a kérdéses valószínűség 7-szer ennyi, 7/6, az esemény bekövetkezése több, mint bizonyos.

5 pont		

c) Egy méter 100 centiméter, tehát 1/4 méter = 25 centiméter. Az 1/4 négyzetgyöke 1/2, a 25 négyzetgyöke 5, tehát 1/2 méter = 5 centiméter.

4 pont		

3. Egy trapéz magassága, egyik, illetve mások átlója ebben a sorrendben egy $q = 2$ hányadosú mértani sorozat három szomszédos tagja. A trapéz területe $T = \sqrt{60} + \sqrt{12}$ területegység. Mekkora a trapéz magassága?

12 pont		

4. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

a) $2x^4 \le x^2 + 1$.

5 pont		

b) $2\cos^2 x \ge \cos x + 1$.

8 pont		

II. rész

Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.

5. **a)** A pozitív egész A és B számok összege 1000. Igazolja, hogy A^2 utolsó három számjegye egyenlő B^2 utolsó három számjegyével.

4 pont		

b) Adjon meg olyan pozitív egész A és B számokat, amelyek összege 1000 és A^2 utolsó <u>négy</u> számjegye egyenlő B^2 utolsó <u>négy</u> számjegyével.

3 pont		

c) Hány pozitív osztója van a $H = 2^{24} - 1$ számnak?

9 pont		

6. Egy dobozban pénzérmék és golyók vannak, amelyek ezüstből vagy aranyból készültek. A dobozban lévő tárgyak 20%-a golyó, a pénzérmék 40%-a ezüst, az aranytárgyak 80%-a érme.

a) A dobozban lévő tárgyak hány százaléka arany pénzérme?

4 pont		

b) A dobozból véletlenszerűen kihúzunk egy tárgyat. Mekkora a valószínűsége, hogy ez a tárgy ezüstből készült?

4 pont		

c) A dobozból véletlenszerűen kihúzunk egy golyót. Mekkora a valószínűsége, hogy ez a golyó ezüstből készült?

4 pont		

d) Értelmezze a **b)** és a **c)** feladatok eredményét a következő eseményekre: E: a kihúzott tárgy ezüstből van; G: a kihúzott tárgy golyó.

4 pont		

7. Egy számtani sorozat első tagja 9, a kilencedik tagja pedig 33.

a) Határozza meg a fenti számtani sorozat azon tagjainak az összegét, amelyek 149 és 301 között vannak.

10 pont		

b) Mennyi a sorozat első huszonöt elemének a négyzetösszege?

6 pont		

8. Egy klinikán olyan betegség kimutatására végeznek vérvizsgálatot, amelyikben száz ember közül átlagosan egy szenved. A vizsgálati személyek ötvenes csoportokban érkeznek és az eddigi gyakorlat szerint egyesével végzik el a tesztet. Egyetlen vérminta vizsgálata 300 forintba kerül.
A klinika vezetője előtt két javaslat fekszik:

A) Egy-egy 50-es csoport vérmintáinak egy részét azonosítható módon tegyék félre, a másik részeket pedig öntsék össze és vizsgálják először a csoportos mintát. Ha ez negatív, akkor nyilván mindenki egészséges, ha pozitív, akkor a félretett egyéni mintákat vizsgálják egyesével.

B) Az *A*) javaslathoz hasonlóan először az 50-es csoport együttes vérmintáját vizsgálják meg. Ha ez pozitív, akkor minden egyes félretett egyéni minta feléből két 25-fős, csoportos mintát készítenek és ezeket ismét együttesen vizsgálják. Ha bármelyik csoport pozitívnak bizonyul, akkor annak a csoportnak a tagjait egyesével szűrik.

A klinika vezetőjeként változtatna-e az addigi gyakorlaton. Ha igen, akkor hogyan és miért?

16 pont		

9. Az alábbi feladatok megoldása során kalkulátor <u>nem</u> használható. Eredményeit indokolja.

a) 1.) Írja föl az $(1+x)^{10}$ hatvány kifejtésének első négy tagjának összegét az x növekvő hatványai szerint rendezve.

2 pont		

2.) A talált kifejezés alapján adjon közelítést $1{,}005^{10}$ értékére.

1 pont		

3.) Igazolja, hogy az így kapott közelítés négy tizedesjegyre pontos.

5 pont		

b). 1.) Ábrázolja az $f(x) = \frac{1500x+1}{500x-2}$ függvény grafikonját, ha $x > 1\,000$.

2 pont		

2.) Határozza meg az $\frac{1500x+1}{500x-2} = \frac{3x}{10000}$ egyenlet pozitív megoldásának az egész részét.

6 pont		