MI ILYENNEK KÉPZELJÜK…

Minta feladatsorok a középszintű

MATEMATIKA

érettségire való felkészüléshez

II. RÉSZ

Összeállították:
a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium vezetőtanárai

1082 Budapest, Horváth Mihály tér 8.

Elérhetőségeink:

Honlapunk: www.fazekas.hu
E-mail: fazekas@fazekas.hu
Tel: 06 1 210 1030
Fax : 06 1 210 0745

BUDAPEST
2005 január

Kedves Kollégák!

A Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium matematikatanárai több feladatsort állítottak össze, segítségként a kétszintű érettségire való felkészítéshez, felkészüléshez.

Ennek az összeállításnak a második részét adjuk át most a kollégáknak. Mi ilyennek képzeljük a feladatsorokat. Természetesen, ezek csak minták.

Bízunk benne, hogy e feladatsorok is szerepet játszanak a remélhetőleg jó érettségi eredmények elérésében.

A 2004 novemberében megjelent részt Fazakas Tünde, Hraskó András, Laczkó László, Orosz Gyula és Pataki János vezetőtanárok állították össze, most Dobos Sándor, Hámori Veronika, Surányi László, Szászné Simon Judit és Táborné Vincze Márta vezetőtanárok feladatsorait adjuk közre.

Középszintű érettségi feladatsorok és megoldásaik

Összeállította: Dobos Sándor

1. feladatsor

I. rész

1. Bergengóciában a gáz ára 40%-kal emelkedett. Az új tarifa szerint a havi átlagos gázdíj 168 peták. Mennyi volt az emelés előtt a havi átlagos gázdíj? 2 pont

2. a, Mennyi a 7200 és 7500 legnagyobb közös osztója? 2 pont
   b, Mennyi a 999 és 1001 legkisebb közös többszöröse? 2 pont

3. Oldja meg a valós számok halmazán: $\frac{1}{x} < x$. 3 pont

4. Az ABC háromszögben AB=3, BC=4, CA=5.
   Mekkora az A csúcsnál levő szög szinusza? 1 pont
   Válaszát indokolja! 2 pont

5. G={ 10-nél kisebb pozitív páros számok}; $H = \{3k+2 \mid k \in N, k^2 < 10\}$
   a, Írja fel a $G \cap H$ halmaz elemeit! 2 pont
   b, Hány eleme van a $G \cup H$ halmaznak? 2 pont

6. Egy dobozban 7 piros és 6 zöld golyó van. Néhány golyót kiveszünk és így a dobozból a megmaradt golyók közül 80% valószínűséggel húzhatunk pirosat. Hány golyót vettünk ki és ezek milyen színűek? 2 pont

7. Egy összejövetelen 5 ember találkozott, néhányan kezet fogtak: Attila négyszer, Botond egyszer, Csanád kétszer, Dezső egyszer. Hányszor fogott kezet Etele? 1 pont
   Válaszát indokolja! 2 pont

8. Mennyi a következő adathalmaz a, átlaga b, mediánja cm-ben megadva:
   32 cm, 0,25 m, 380mm, fél méter, 5 cm. 2 pont

9. Mennyi a $\sqrt{5}+1$ szám négyzete? Karikázza be a helyes válasz betűjelét!
   a, 5+1 b, 25+1 c, $6+\sqrt{20}$ d, $\sqrt{25+2\sqrt{5}+1}$ e, 10 2 pont

10. $f(x) = 4 - |x|$
    a, Állapítsa meg az f függvény értékkészletét! 2 pont
    b, Határozza meg az f függvény zérushelyeit! 1 pont

11. Döntse el igaz, vagy hamis (a szögeket radiánban értjük):
    a, A (0, 0.3) intervallumon a sin$x$ monoton növekedő. 1 pont
    b, A (0, 0.3) intervallumon a cos$x$ értéke 0.3-nál kisebb. 1 pont

II./A rész

12 Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

a, $|x-1|+|x+1|=2-x$ 7 pont

b, $3^x+\dfrac{3}{3^x}=4$ 5 pont

13. Palkó választott magának 9 szomszédos egész számot. Észrevette, hogy az első 5 szám négyzetének összege egyenlő a további négy szám négyzetének összegével. Melyek lehettek Palkó számai?
12 pont

14. Az ABC háromszög AB oldalának A-hoz közelebbi harmadolópontja H, a BC oldal felezőpontja F. Milyen arányban osztja az AF szakasz a CH szakaszt? 12 pont

II./B rész

A 15., 16., 17. feladatok közül tetszés szerint választott kettőt kell megoldania.

15. Tekintsük a derékszögű koordinátarendszerben a következő egyenletekkel megadott alakzatokat:

i, $(x-p)^2+y^2=1$ ii, $x^2-y^2=0$

a, Készítsünk ábrát az i, alakzatról p=3 esetén. 5 pont
b, Készítsünk ábrát az ii, alakzatról. 5 pont
c, A p paraméter mely értékei esetén lesz a két egyenletből álló egyenletrendszernek páratlan sok megoldása?
7 pont

16. A strand új pancsolómedencéje 8 m sugarú kör. Egy 10 és egy 14 m hosszú úszó elválasztó kötelünk van.
a, Az úszóovi számára a 10 m-es elválasztó kötelet kifeszítették, végei a medence kerületén rögzítettek. Mekkora a medencéből a kötél által leválasztott kisebb körszelet területe? 7 pont

b, Kifeszítették mindkét kötelet, ezek egyik vége ugyanahhoz a ponthoz rögzített. Hány méterre van egymástól a köteleket rögzítő másik két pont? 10 pont

17. A kutatóállomásról a világűrbe kilökött koncentrált szemét hőmérséklete 193 Kelvin. Ennek tömege és fajhője olyan értékű, hogy egy másodperc múlva a hidegebb környezet miatt lehűlő test hőmérséklete az eredeti hőmérsékletnek csupán 75%-a. A további másodpercekben tegyük fel, hogy a lehűlés ugyanilyen arányú, azaz valamilyen időpillanatban a test hőmérséklete az 1 másodperccel előbbinek háromnegyed része.
a, Mennyire hűlt le az űrszemét 6 másodperc alatt? 8 pont
b, Hány másodperc alatt hűl le 2 Kelvinre? 9 pont

Dobos Sándor 1. feladatsorának megoldásai és pontozási útmutatója

1. feladat. $x \cdot 1.4 = 168$, tehát x=120. A régi havi átlag 120 peták volt.
(Ha a petákot nem írja ki, de a 120-at kiszámolja, a 2 pont megadható.) Összesen: 2 pont

2. feladat. a, (7200, 7500)=300. 2 pont
b, [999, 1001]=999999 2 pont
Összesen: 4 pont

3. feladat. Ha x pozitív, akkor x^2>1, tehát x>1. 1 pont
Ha x negatív, akkor x^2<1, tehát -1<x<0. 1 pont
A megoldás $x \in (-1,0) \cup (1,\infty)$. 1 pont
Összesen:3 pont

4. feladat. A 3, 4, 5 Pitagoraszi számhármas. A Pitagorasz tétel megfordítása szerint a háromszög derékszögű. 1 pont
$\sin BAC\angle = \frac{BC}{CA} = \frac{4}{5} = 0.8$. 2 pont
Összesen: 3 pont

5. feladat. $\{2,4,6,8,\} \cap \{2,5,8,11\} = \{2,8\}$. A metszet elemei a 2 és a 8. 2 pont
$\{2,4,6,8,\} \cup \{2,5,8,11\} = \{2,4,5,6,8,11\}$. Az uniónak 6 eleme van. 2 pont
Összesen: 4 pont

6. feladat. A megmaradtak között négyszer annyi piros van, mint zöld. 1 pont
7 pirosból 4-gyel osztható maradt, tehát 4 piros és 1 zöld maradt.
3 piros és 5 zöld golyót vettünk ki, összesen 8 golyót. 1 pont
Összesen: 2 pont

7. feladat. Attila a többiekkel mindenkivel kezet fogott, Botond és Dezső így mással már nem fogott kezet.
1 pont
Csanád Attilán kívül valakivel kezet fogott, ez csak Etele lehet. 1 pont
Etele Attilával és Csanáddal fogott kezet, összesen két emberrel. 1 pont
Összesen: 3 pont

8. feladat. a, Az átlag 30 cm. 1 pont
b, A medián 32 cm. 1 pont
Összesen: 2 pont

9. feladat. A c, válasz a jó. 2 pont
Összesen: 2 pont

10. feladat. a, A függvény értékkészlete $(-\infty,4]$. 2 pont
b, A függvény zérushelyei a -4 és a 4. 1 pont
Összesen: 3 pont

11. feladat. a, Az állítás igaz. 1 pont
b, Az állítás hamis. 1 pont
Összesen: 2 pont

II./A rész

12. feladat. a, Ha x<-1, akkor az egyenlet $1 - x - x - 1 = 2 - x$. 1 pont
Ennek megoldása x=–2. 1 pont
Ha $-1 \le x < 1$, akkor az egyenlet $1 - x + x + 1 = 2 - x$. 1 pont
Ennek megoldása az x=0. 1 pont

Ha $1 \le x$, akkor az egyenlet x–1+x+1=2–x. 1 pont

Ennek megoldása $x = \frac{2}{3}$. Ez kisebb egynél, nem megoldás. 1 pont

Ellenőrzés. 1 pont

Összesen: 7 pont

b, 3^x mindig pozitív, az egyenlet minden x-re értelmezett. 1 pont

Legyen $y=3^x$, ekkor az egyenlet $y + \frac{3}{y} = 4$. 1 pont

Ennek megoldásai $y=1$ és $y=3$. 1 pont

Az egyenlet megoldásai $x_1=0$ és $x_2=1$. 1 pont

Ellenőrzés. 1 pont

Összesen: 5 pont

13. feladat. Legyen a 9 szám közül az ötödik x. Ekkor:

$$(x-4)^2 + (x-3)^2 + (x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 = (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 + (x+4)^2$$ 3 pont

Elvégezve a műveleteket és rendezve

$$5x^2 - 20x + 30 = 4x^2 + 20x + 30.$$ 3 pont

Rendezve $x^2 = 40x$.

Ennek megoldásai az $x_1=0$ és az $x_2=40$. 3 pont

Palkó számai lehettek a -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, vagy 1 pont

a 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44. 1 pont

Ellenőrzés. 1 pont

Összesen: 12 pont

Amennyiben a feladat szövege alapján sikerül helyesen felírni az egyenletet 3 pont jár. Amennyiben csak az egyik megoldást találja meg, akkor legfeljebb 8 pontot kaphat.

14. feladat. Legyen az AF és CH szakaszok metszéspontja M

Legyen az AB szakasz B-hez közelebbi harmadolópontja D.

A CHB háromszögben FD középvonal, ezért $CH=2FD$. 4 pont

Az AFD háromszögben HM középvonal, ezért $2HM=FD$. 4 pont

A CH szakasznak ezek szerint negyede a HM szakasz, azaz

$HM:MC=1:3$. 4 pont

Összesen: 12 pont

II./B rész

15. feladat. a, Az i, alakzat egy (3,0) középpontú 1 sugarú kör. 5 pont

(Ha az ábráról jól leolvasható a középpont és a sugár, akkor is jár az öt pont.)

b, Az ii, alakzat $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = 0$ miatt két egyenes lesz:

az $y=x$ és $y=-x$ egyenesek. 5 pont

c, A p paraméter változtatásával a kört tudjuk az x tengely mentén mozgatni. 2 pont

Az alakzatok szimmetrikusak az x tengelyre, ezért páratlan sok megoldás csak akkor lehet, ha a tengelyen páratlan sok közös pontjuk van. 3 pont

Akkor lesz három megoldás, ha a kör áthalad az origón, ekkor:

$p_1=-1$, vagy $p_2=1$. 2 pont

Összesen: 17 pont

16. feladat. a, Legyen a 10m hosszú húrhoz tartozó középponti szög $2x$. Ekkor:

10m=2$r$sinx összefüggésből sin$x$=0.625, ahol r=8m volt. 2 pont

arcsin0.625=0.675, tehát a középponti szög radiánban 1.35. 2 pont

A körszelet területe:

$$\frac{1}{2} r^2 (2x - \sin 2x) = 32m^2 (1.35 - 0.976) \approx 12m^2$$ 3 pont

b, Legyen a 14m hosszú húrhoz tartozó középponti szög $2y$. Ekkor:

	14m=2$r$sin$y$ összefüggésből sin$y$=0.875, ahol r=8m volt.	2 pont
	arcsin0.875=1.06, tehát a középponti szög radiánban 2.12.	2 pont
	A kötelek végpontjaihoz tartozó középponti szög: 2.12–1.35=0.77, vagy 2.12+1.35=3.47.	2 pont
	A kötelek rögzítőpontjai alkotta háromszögre felírhatjuk a cosinus tételt. Jelölje a keresett távolságot x. Kihasználjuk, hogy a kerületi szög a középpontinak éppen fele: $x^2=10^2+14^2-2\cdot 10\cdot 14\cdot\cos 0.385$ $x^2=10^2+14^2-2\cdot 10\cdot 14\cdot\cos 1.735$	2 pont
	Ezekből a lehetséges válaszok: 6,04 m, vagy 15,8 m.	2 pont
	Összesen 17 pont	
17.	Egy mp alatt 75%-os a hűlés, 193·0,75 K° lesz a hőmérséklet.	2 pont
	A hőmérséklet másodpercenként leolvasott értékei mértani sorozatot alkotnak.	2 pont
	6 mp múlva a hőmérséklet $193\cdot 0{,}75^6$ K°.	2 pont
	A kérdéses hőmérséklet 34,34 K°.	2 pont
		Összesen: 8 pont
	Jelölje a kérdéses másodpercek számát z. Ekkor $193\cdot 0{,}75^z=2$.	2 pont
	Innen $0{,}75^z=2:193$.	2 pont
	$z=\log_{0,75}(2:193)$	2 pont
	A szükséges másodpercek száma:15, 88 másodperc, azaz kb 16 másodperc.	3 pont.
		Összesen: 9 pont

Középszintű érettségi feladatsorok és megoldásaik
Öszeállította : Dobos Sándor

2. feladatsor

I. rész

1. A kettes számrendszerben felírt 1101 szám értéke mennyi tízes számrendszerben? 2 pont

2. Döntse el igaz, vagy hamis az állítás:
   a, A háromszög köré írt körének közepe a szögfelezők metszéspontja. 1 pont
   b, Egy konvex ötszög belső szögeinek összege mindig 540˚. 1 pont
   c, A háromszög köré írt körének középpontja az oldalak felezőmerőlegesein van. 1 pont
   d, A háromszög súlypontja a csúcsoktól egyenlő távolságra van. 1 pont

3. Mekkora a legnagyobb prímosztója *n*-nek, ha $n = 135^2 - 35^2$? 1 pont
   Válaszát indokolja! 2 pont

4. Írja fel tizedestört alakban $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$. 2 pont

5. Hány valódi részhalmaza van egy három elemű halmaznak? 2 pont

6. Mely valós *x*-re lesz $f(x) = x^2 + 2x + 3$ értéke a lehető legkisebb. 1 pont
   Válaszát indokolja. 2 pont

7. p=12, q=18,
   a, Mekkora lesz r, ha p, q, r egy számtani sorozat egymást követő elemei? 2 pont
   b, Mekkora lesz r, ha p, q, r egy mértani sorozat egymást követő elemei? 2 pont

8. Egy érme egyik oldalán az 1, a másik oldalán a 2 szám látható. Kétszer feldobjuk.
   a, Mekkora a valószínűsége, hogy a dobott számok szorzata páratlan? 2 pont
   b, Mekkora a valószínűsége, hogy a dobott számok összege páros? 2 pont

9. Egy lóversenyen négy lovas indult: Ond, Kond, Tas és Huba. Nem volt holtverseny.
   a, Hányféle lehetett a befutási sorrend? 2 pont
   b, Hányféle lehetett a befutási sorrend, ha Huba Tas után ért célba? 2 pont

10. Oldja meg a valós számok halmazán: lg3+lg(x+2)=lg15 2 pont

II./A rész

11. Oldja meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenségeket:

a, $\dfrac{36+4x}{x^2+4x+3} \geq 2$. 6 pont

b, $\sqrt{\sin x - 1} + \sqrt{\cos x + 1} = 2$. 6 pont

12. Egy kör alapú egyenes kúp alapkörének sugara és magassága is 6 cm.

a, Mekkora a kúp felszíne? 6 pont

b, Az alapkörrel párhuzamosan 2cm magasságban kettészeli egy sík a kúpot. Mekkora a keletkező két rész térfogatának aránya? 6 pont

13. Három zsák burgonya tömege: 38 kg, 42 kg, 50 kg.

a, Hány kg burgonyát kell kivenni a 42 kg-os zsákból, hogy a tömegek átlaga és mediánja egyenlő legyen? 6 pont

b, Az eredeti zsákokkal indulva hány kg burgonyát tegyünk át az 50 kg-osból a 42 kg-osba, hogy a tömegek szórása a lehető legkisebb legyen? 6 pont

II./B rész

A 14,. 15., 16. feladatok közül tetszés szerint választott kettőt kell megoldania.

14. Egy függvényről tudjuk, hogy $f(x)=ax+b$ alakú, ahol a és b valós számok. $f(-1)=-3$, $f(3)=5$.

a, Határozzuk meg a és b értékét. 4 pont

b, Határozzuk meg az $f(x)$ függvény inverzének helyettesítési értékét a 7 helyen. 5 pont

c, Adjuk meg azt az $f(x)$-től különböző $g(x)=cx+d$ függvényt, melyre teljesül, hogy minden x esetén $f(f(x))=g(g(x))$. 8 pont

15. Egy robot egyszerre két lézerforrasztóval tud dolgozni. Három fajta forrasztófej van a műhelyben a régi, az új és a legújabb. A régi és az új együtt 12 másodperc alatt készít el egy munkadarabot, a régi és a legújabb 9 másodperc alatt, az új és a legújabb pedig 7,2 másodperc alatt.

a, Hány másodpercre lenne szükség, ha a robot mind a hárommal egyszerre tudna dolgozni? 10 pont

b, Hány másodpercre lenne szükség, ha egyszerre csak a régi lézerforrasztót használhatnánk 6 másodpercig és utána csak az újjal fejeznénk be a munkát? 7 pont

16. Bergengóciában 40% a valószínűsége, hogy valaki szemüveges. A Bergengóc lakosság 50%-a egyáltalán nem fogyaszt gyümölcsöt.

a, Legfeljebb a lakosság hány százaléka ehet szemüvegben almát? 3 pont

b, A lakosság legalább hány százaléka ehet szemüveg nélkül gyümölcsöt? 4 pont

c, Ha kiderülne, hogy a szemüvegesek 12,5%-a nem eszik gyümölcsöt, akkor a gyümölcsfogyasztók hány százalékáról állíthatnánk, hogy nem szemüveges? 10 pont

Dobos Sándor 2. feladatsorának megoldásai és pontozási útmutatója

1. feladat. 8+4+1=13. A keresett szám a 13. 2 pont
Összesen: 2 pont

2. feladat. Az a, állítás hamis. 1 pont
A b, állítás igaz. 1 pont
A c, állítás igaz. 1 pont
A d, állítás hamis. 1 pont
Összesen: 4 pont

3. feladat. $n = 135^2 - 35^2$ =(135+35)(135–35)=170·100=17·2³·5³. 2 pont
A legnagyobb prímosztó a 17. 1 pont
Összesen: 3 pont

4. feladat. A megadott szám a 8. 2 pont
Összesen: 2 pont

5. feladat. Hat darab valódi részhalmaz van. 2 pont
Összesen: 2 pont

6. feladat. $f(x) = x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$ 1 pont
Ez akkor a legkisebb, ha x+1 éppen 0, azaz x=–1 esetén. 2 pont
Összesen: 3 pont

7. feladat. a, $r=q+(q-p)=24$. 2 pont
b, $r=q\cdot(q/p)=27$. 2 pont
Összesen: 4 pont

8. feladat. a, A szorzat páratlan, ha mindkétszer az 1-re esett.
Ennek valószínűsége 0.25. 2 pont
b, Vagy mindkettő 1-es, vagy mindkettő 2-es.
Ennek valószínűsége 0.5. 2 pont
Összesen: 4 pont

9. feladat. a, A befutási sorrendek száma 4!=24. 2 pont
b, Az esetek felében Huba van Tas előtt, a másik felében fordítva.
A lehetséges sorrendek száma 12. 2 pont
Összesen: 4 pont

10. feladat. lg3+lg(x+2)=lg(3·(x+2))=lg15.
Ennek megoldása az x=3. 2 pont
Összesen: 2 pont

II./A rész

11. feladat. a, $\frac{36+4x}{x^2+4x+3} \geq 2$ először 0-ra rendezünk és közös nevezőre hozunk:

$$0 \geq \frac{2x^2+8x+6}{x^2+4x+3} - \frac{36+4x}{x^2+4x+3}.$$

$$0 \geq \frac{2x^2+4x-30}{x^2+4x+3}.$$ 2 pont

A számláló nem negatív, ha $x \leq -5$ vagy $3 \leq x$. 1 pont
A nevező pozitív, ha x<–3 vagy –1<x. 1 pont
A megoldás: $-5 \leq x < -3$, vagy $-1 < x \leq 3$. 2 pont
Összesen: 6 pont

b, $\sqrt{\sin x - 1} + \sqrt{\cos x + 1} = 2$ Vizsgáljuk a gyök alatti kifejezést:

sinx–1 csak akkor nem negatív, ha sinx=1. 2 pont
Ekkor cos$x$ értéke 0 lesz. 2 pont
Ekkor a bal oldal értéke 1, a jobb oldal 2, tehát nincs megoldás. 2 pont
Összesen: 6 pont

12. feladat. a, Ha egy kör alapú egyenes kúp alapkörének sugara és magassága is 6 cm,
akkor a alkotója $a=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$. 1 pont
Az alapkör területe: T=36π. 1 pont
Az alapkör kerülete K=12 π 1 pont
A palást felszíne: $a\cdot(K/2)=36\pi\sqrt{2}$. 2 pont
A kúp felszíne: $36\pi\left(1+\sqrt{2}\right)\approx 273cm^2$. 1 pont
Összesen: 6 pont

b, Az eredeti kúp térfogata: $V=6^2\cdot\pi\cdot 6=216\pi$. 2 pont
Az alapkörrel párhuzamosan 2cm magasságban kettészeli egy sík a kúpot.
Ekkor a levágott kis kúp az eredetihez hasonló, a hasonlóság aránya 2:3. 2 pont
A térfogatok aránya a hasonlóság arányának köbe, tehát 8:19. 2 pont
Összesen: 6 pont

13. feladat. a, Jelölje a kivett burgonya tömegét x. Ekkor az átlag:
$$\frac{38+42-x+50}{3}=43{,}\dot{3}-\frac{x}{3}.$$ 2 pont

Ez az érték nagyobb, mint 42–x, ezért a medián a 38 lehet csak. 2 pont
$$43{,}\dot{3}-\frac{x}{3}=38 \quad\Rightarrow\quad x=16.$$
A kivett tömeg 16 kg. 2 pont
Összesen: 6 pont

b, Jelölje az áthelyezett burgonya tömegét y.
A zsákokban a tömeg átlaga most $\frac{38+42+50-y}{3}=43{,}\dot{3}-\frac{y}{3}$ 1 pont
A szórás ugyanakkor minimális, amikor a szórásnégyzet:
$$D^2=\frac{\left(38-43{,}\dot{3}-y/3\right)^2+\left(42-43{,}\dot{3}-y/3\right)^2+\left(50-y-43{,}\dot{3}-y/3\right)^2}{3}$$ 2 pont
$$D^2=\frac{2y^2-\frac{4}{9}y+\frac{672}{9}}{3}.$$
Ennek minimuma az y = 1/9 –nél van. 3 pont
Összesen: 6 pont

II./B rész

14. feladat. a, Behelyettesítve:
-3=a·(-1)+b illetve 5=a·(3)+b 2 pont
Ennek megoldásai a=2 b=–1. 2 pont
Összesen: 4 pont

b, Ha $f(x)$=2x-1, akkor ($f(x)$+1)/2=x. 2 pont
Tehát a függvény inverze $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$. 2 pont
Ennek helyettesítési értéke a 7-nél a 4. 1 pont
Összesen: 5 pont

c, Ha $f\left(f\left(x\right)\right)=g\left(g\left(x\right)\right)$, akkor ez részletesen:
a(*ax*+*b*)+*b*=*c*(*cx*+d)+*d*. 2 pont
Azaz $4x-3=c^2x+cd+d$. 2 pont
Ebből a lehetséges (*c*,*d*) párok: (2, –1) és (–2, 3). 2 pont
Az *f*-től különböző keresett függvény *g*(*x*)=–2*x*+3. 2 pont
Összesen: 8 pont

15. feladat. a, A változók jelöljék azt, hogy az egész munka hanyadrészét végzi el egy adott lézerforrasztó egy másodperc alatt. régi *x*, új *y*, legújabb z.
2 pont
Ekkor 12*x*+12*y*=9*x*+9*z*=7,2*y*+7,2d=1. 2 pont
Azaz $x+y=\frac{1}{12}$, $x+z=\frac{1}{9}$, $y+z=\frac{1}{7{,}2}$. 2 pont
Összeadva $2(x+y+z)=\frac{1}{12}+\frac{1}{9}+\frac{1}{7{,}2}=\frac{1}{3}$. 2 pont
A három együtt másodpercenként a munka hatodát végzi el.
Mindhárommal 6 másodpercig tartana a munka. 2 pont
Összesen: 10 pont

b, Mivel *x*+*y*+*z*=1/6 és *x*+*y*=1/12, ezért *z*=1/12. 2 pont
Mivel x+*z*=1/9, ebből *x*=1/36
y=2/36=1/18. 2 pont
A régi gép 6 másodperc alatt 6/36=1/6-od részt végez el. 1 pont
A maradék 5/6-odhoz az újnak 15 másodpercre van szüksége. 1 pont
Így összesen a munka 6+15=21 másodpercig tartana. 1 pont
Összesen: 7 pont

16. feladat. a, Mivel a lakosság fele fogyaszt gyümölcsöt és ennél kevesebb, 40% a szemüveges, ezért előfordulhat, hogy minden szemüveges almát eszik. Azaz legfeljebb 40% a válasz. 3 pont
Összesen: 3 pont

b, Még ha minden szemüveges is fogyasztana gyümölcsöt, akkor is lenne 10%, aki szemüveg nélkül ehet gyümölcsöt. Legalább 10% a válasz. 4 pont
Összesen: 4 pont

c, A 40%-nyi szemüveges 12.5%-a éppen 5%. 2 pont
Ennyi szemüveges nem eszik gyümölcsöt, akkor a lakosság 35%-a szemüveges és eszik gyümölcsöt. 4 pont
A gyümölcsevők a lakosság 50%-a, ebből 35% szemüveges. 2 pont
A gyümölcsfogyasztók 30%-a nem szemüveges. 2 pont
Összesen: 10 pont

Középszintű érettségi feladatsorok és megoldásaik
Öszeállította : Hámori Veronika

1. feladatsor
(Tanulói példány)

I. rész

1. A bevásárlóközpontban minden vasárnap 10%-kal leszállítják egy termék árát, majd hétfőn visszaállítják az eredeti árat. A bevásárlóközpont vezetősége úgy döntött, hogy egy hétfői árazás során a vasárnapi árat 20%-kal növelik, hogy a következő vasárnapi leszállítás ne okozzon anyagi veszteséget. Jó volt az üzleti terv? Válaszát indokolja!

Az üzleti terv	*Helyes / helytelen* volt (a kívánt válasz aláhúzandó)	3 pont	

A megoldás indoklása:

2. Írja le a következő állítások tagadását:
a) Minden ember szereti a spenótot.
b) Senki sem szereti a spenótot.

Az a) állítás tagadása		1 pont	
A b) állítás tagadása		1 pont	

3. Melyik kifejezésnek a legbővebb az értelmezési tartománya az alábbiak közül:

a) lg x b) lg x^2 c) lg $\frac{1}{x}$

A legbővebb értelmezési tartománya a(z)	kifejezésnek van	2 pont	

4. Az ***a*** és a ***b*** közös kezdőpontú *egységvektorok* 120^o - os szöget zárnak be egymással.
a) Számítsa ki a két vektor skalárszorzatát!
b) Milyen hosszú az ***a*** + ***b*** vektor ?
c) Milyen hosszú az ***a*** - ***b*** vektor ?

A két vektor skalárszorzata	***ab***=	1 pont	
A két vektor öszegének hossza:	|***a***+ ***b***|=	2 pont	
A két vektor különbségének hossza	|***a*** - ***b***|=………………………..	2 pont	

1. ábra: a két vektor összegének ábrázolása

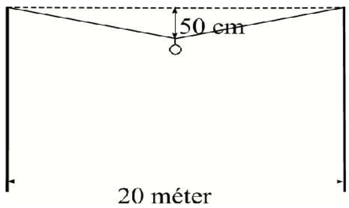
2. ábra: a két vektor különbségének ábrázolása

5. Egy téglatest csúcsai : ABCDEFGH. Az (A és E), (B és F), (C és G), (D és H) csúcsok egymás fölött helyezkednek el. Az egy csúcsból kiinduló három él hossza:
AB = 10 cm, AD = 8 cm, AE = 4 cm.
Milyen távol van az AB él **M** felezőpontja a CG él **N** felezőpontjától?

Az MN szakasz hossza:		cm	3 pont……..	

A megoldás részletezése és indoklása:

6. Egy 20 méter széles utcában két szemközti ház közé kifeszített acélhuzalra függesztett karácsonyi utcadekoráció „belógása” 50 cm. Mekkora szöget zár be a vízszintessel a tartóhuzal?



A huzal a vízszintessel		……fokos szöget zár be	3 pont	

A megoldás menete:

7. Egy derékszögű háromszög egyik befogója 12 cm. Milyen távol van az átfogó felezőpontja a másik befogótól?

A kérdezett távolság centiméterben		………………..cm	2 pont	

8. Írja fel az $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 21$ körrel koncentrikus (egyközepű) és fele akkora sugarú kör egyenletét!

Az adott kör	sugara: **r**= …..; középpontjának koordinátái: **C(…;…)**	2 pont	
A keresett kör	egyenlete:	1 pont	

9. a) Hány csupa páratlan számjegyből álló ötjegyű szám van?
b) Ezek közül hány kezdődik 1-gyel?
c) Hány csupa különböző páratlan számjegyekből álló ötjegyű szám van?

a)

A keresett ötjegyű számok száma:		2 pont	

b)

Az 1 – gyel kezdődő számok száma:		1 pont	

c)

Az 1 – gyel végződő számok száma:		1 pont	

10. Egy körgyűrűcikk alakú nézőtér első sorában 12 szék van, minden további sorban 3-mal több, mint az előzőben. A nézőtéren összesen 20 sor van. Mennyi az ülőhelyek száma a nézőtéren?

Az ülőhelyek száma:		3 pont	

A megoldás menete:

II./A rész

11. feladat

Egy osztályban a matematika dolgozat eredményei a következők voltak:

osztályzat	1	2	3	4	5
darabszám	6	4	4	9	5

a) Jellemezze középértékekkel az osztály teljesítményét!

A számtani közép		3 pont	
A módusz		2 pont	
A medián		2 pont	

b) A *számtani közepet* úgy számoltam ki, hogy:…………………………......

1 pont	

*Módusz*nak nevezzük a ……………………………………………………

1 pont	

Mediánnak nevezzük a ……………………………………………………

1 pont	

c) Véleménye szerint melyik középérték jellemzi leginkább egy osztály teljesítményét? **Válaszát indokolja**!

(A logikus indoklásért)

2 pont	

12. feladat

Egy háromszög csúcsainak koordinátái a derékszögű koordinátarendszerben:
A(0;0), B(10;0) és C(3;4))
a) Számolja ki a háromszög területét!
a

A háromszög területe:		t.e.	2 pont	

b) Határozza meg a legnagyobb szöget fokokban!

A háromszög legnagyobb szöge	a(z) ……oldallal szemben van. = °	4 pont	

c) Adja meg a C csúcsnak az A csúcsból induló szögfelezőjére vonatkozó tükörképének koordinátáit!

A C csúcs tükörképe az A csúcsból induló szögfelezőre	C′(; .)	6 pont	

Megoldás:

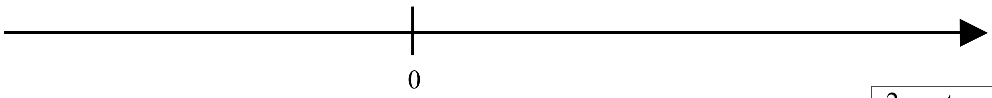
13 feladat

a) Mely valós számok elégítik ki az alábbi egyenlőtlenséget?

$$\log_8 \frac{x^2-2x}{x-3} \langle 1$$

Az egyenlőtlenséget kielégítő valós számok:		8 pont	

b) Ábrázolja a megoldáshalmazt számegyenesen!



2 pont	

c) Írjon fel olyan másodfokú egyenletet, amelynek gyökei egész számok és mindkét gyöke eleme a fenti egyenlőtlenség megoldáshalmazának!

Egy kívánt tulajdonságú másodfokú egyenlet:		2 pont	

Megoldás:

II./B rész

A 14., 15., és 16. feladatok közül tetszés szerint választott kettőt kell megoldania.

14. feladat

a) Határozza meg az **f(x)=** |**x-3**|+|**x+1**|+|**x-2**| függvény értékkészletének legkisebb elemét! Hol veszi fel a függvény ezt az értéket?

A függvény minimuma:	x=….. helyen f(..)=….. érték		

b) Határozza meg a függvény értelmezési tartománya -1⟨x⟨2 intervallumához tartozó szakaszának meredekségét!

A keresett meredekség:		3 pont	

c) Hogyan kell megválasztani a **g(x) = -** |**x-2**|**+ a** függvény hozzárendelési szabályában az **„a”** paraméter értékét, ha azt akarjuk, hogy az f(x) és a g(x) függvények grafikonjának

α) 0 közös pontja legyen

β) 1 közös pontja legyen

γ) 2. közös pontja legyen

	2 pont	
	2 pont	
	2 pont	

Megoldás: (14. feladat)

15. feladat

a) Hogyan kell megválasztani a K = $\dfrac{3n+2}{4n+1}$ kifejezésben „n” egész szám értékét, hogy a tört egyszerűsíthető legyen?

„n” lehetséges értékei:		8 pont	

b) Hogyan kell a **p** egész paraméter értékét úgy megválasztani, hogy a T = $\dfrac{pn+1}{4n+1}$ tört semmilyen „n” természetes szám választása esetén se legyen egyszerűsíthető!

p értéke		4 pont	

c) Egy idomított bolhapár ugrál a számegyenesen, de gazdájuk sohasem egy időben küldi pályára őket.. A lány azokra az egész számokra ugrik, amelyek 3-mal osztva 1 maradékot adnak, a fiú pedig csak azokra, amelyek a 4-gyel osztható számok után következő egész számok. Hagyhat-e a fiú levelet a párjának a 2005. osztópontban, és megtalálhatja-e azt a lány?

a fiú a 2005. pontban	hagyhat/nem hagyhat levelet	5pont	

Megoldás:

<u>16 feladat</u>

Egy lakásépítéshez valaki 0,5%-os havi kamatra felvesz 10 millió Forintot, amelyet 10 év alatt havi részletekben fizet vissza.

a) Mennyi a havi törlesztő részlet, ha minden hónap végén tőkésítik a kamatot?

A havi törlesztő részlet:		8 pont	

b) Ha kamatot csak év végén számolnak, tehát az év közi befizetések csak egy összegben a következő évben kamatoznak, akkor mennyi lenne a havi részlet? Korrekt eljárás lenne ez a bank részéről?

A havi törlesztő részlet:		4 pont	
A bank részéről az eljárás:	korrekt/nem korrekt	2 pont	

c) Ha öt év (félidő) után már van elég pénze az adósnak és meg akar szabadulni a tartozásától, akkor mennyit kell kifizetnie egy összegben, hogy törlessze a teljes tartozást?

Az egy összegben kifizetendő tartozás:		3 pont	

Megoldás:

Hámori Veronika 1. feladatsorának megoldása és pontozási útmutatója

(Tanári példány)

I. rész

1. A bevásárlóközpontban minden vasárnap 10%-kal leszállítják egy termék árát, majd hétfőn visszaállítják az eredeti árat. A bevásárlóközpont vezetősége úgy döntött, hogy egy hétfői árazás során a vasárnapi árat 20%-kal növelik, hogy a következő vasárnapi leszállítás ne okozzon anyagi veszteséget. Jó volt az üzleti terv? Válaszát indokolja!

Az üzleti terv	***helyes***/*helytelen* volt (a kívánt válasz aláhúzandó)	3 pont	

A megoldás indoklása:
*Az árú eredeti ára **F** Forint volt.*
*A vasárnapi ár **0,9F**.*
*Az üzleti terv szerint a leszállítást követő hétfőn az ár: **(0,9F)·1,2F** Forint.* *1 pont*
*A következő vasárnapi ár: 0,9·((0,9F)·1,2)=0,9·0,9·1,2F Forint=**0,972F** Forint* *1 pont*
*Ez pedig **több**, mint a korábbi vasárnapi 0,9F Forint helyes válasz: 1 pont (ez csak akkor jár, ha indokolja a válasz (nem kell szövegesen, csak derüljön ki az előző soraiból), és nem jár, ha rosszul indokolja a jó tippet)*

2. Írja le a következő állítások tagadását:
a) Minden ember szereti a spenótot.
b) Senki sem szereti a spenótot.

Az a) állítás tagadása	*Van olyan ember, aki nem szereti a spenótot∗*	1 pont	
A b) állítás tagadása	*Van, aki szereti a spenótot.*	1 pont	

∗ *másik helyes válaszlehetőségek: Nem minden ember szereti a spenótot*
Legalább egy ember nem szereti a spenótot.

3. Melyik kifejezésnek a legbővebb az értelmezési tartománya az alábbiak közül:

a) lg x b) lg x^2 c) lg $\frac{1}{x}$

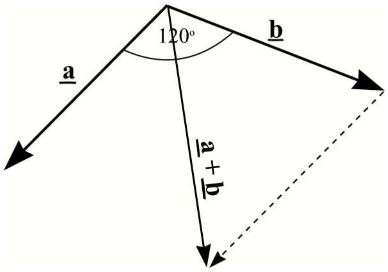
A legbővebb értelmezési tartománya a(z)	***b)*** kifejezésnek van	2 pont	

(Az lgx és az lg 1/x értelmezési tartománya egyaránt x⟩O, az lg x^2 értelmezési tartománya a 0 kivételével minden valós szám)
Ha jól állapít meg legalább egy értelmezési tartományt, akkor 1 pontot kap
2 pont csak a helyes válaszért jár

4. Az $\underline{\boldsymbol{a}}$ és a $\underline{\boldsymbol{b}}$ közös kezdőpontú *egységvektorok* 120 ^{o} - os szöget zárnak be egymással.
a) Számítsa ki a két vektor skalárszorzatát
b) Milyen hosszú az $\underline{a+b}$ vektor ?
c) Milyen hosszú az $\underline{a-b}$ vektor ?

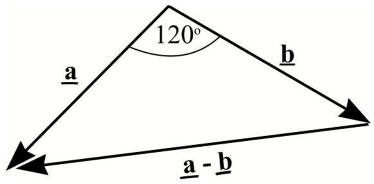
A két vektor skalárszorzata	$\underline{ab}$=1·1·cos120 ^{o} = **- 0,5**	1 pont	
A két vektor öszegének hossza:	$\|\underline{a}+\underline{b}\|$= **1**………………………..	2 pont	
A két vektor különbségének hossza	$\|\underline{a}-\underline{b}\|$= **√3**………………………..	2 pont	

1. ábra: a két vektor összegének ábrázolása



1 pont

2. ábra: a két vektor különbségének ábrázolása



1 pont

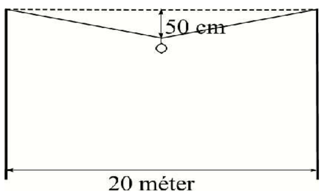
(*Az ábrákért 1-1 pont jár, a helyes válaszért – ábra nélkül is, – csak számolással 2-2 pont)*

5. Egy téglatest csúcsai : ABCDEFGH. Az (A és E), (B és F), (C és G), (D és H) csúcsok egymás fölött helyezkednek el. Az egy csúcsból kiinduló három él hossza:
AB = 10 cm, AD = 8 cm, AE = 4 cm.
Milyen távol van az AB él **M** felezőpontja a CG él **N** felezőpontjától?

Az MN szakasz hossza:	$\sqrt{93}$ cm	3 pont	

A megoldás pontozása:
Az MBC derékszögű háromszögben alkalmazott pithagorasz tételért: *1 pont*
Az MCN derékszögű háromszögben alkalmazott pithagorasz tételért: *1 pont*
A helyes válaszért *1 pont*
A hiányos, vagy részben hibás megoldásért legföljebb 1 pont adható)

6. Egy 20 méter széles utcában két szemközti ház közé kifeszített acélhuzalra függesztett karácsonyi utcadekoráció „belógása" 50 cm. Mekkora szöget zár be a tartókötél a vízszintessel?



A huzal a vízszintessel:	**2,86** ^{o} -os szöget zár be	3 pont	

Pontozás:
A derékszögű háromszög fölrajzolásáért *1 pont*
A szögfüggvény helyes meghatározásáért: *1 pont*
A helyes válaszért : *1 pont*

7. Egy derékszögű háromszög egyik befogója 12 cm. Milyen távol van az átfogó felezőpontja a másik befogótól?

A kérdezett távolság centiméterben:	…**6** …..cm-re	2 pont	

(Jó ábra, illetve a középvonal tulajdonság felismerése, vagy számolás- a jó végeredmény nélkül – 1 pont)

8. Írja fel az $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 21$ körrel koncentrikus (egyközepű) és fele akkora sugarú kör egyenletét!

Az adott kör	sugara: **r**= **4**; középpontjának koordinátái: **C(2,1)**	1+1 pont	
A keresett kör	egyenlete: $\mathbf{(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4}$	1 pont	

9. a) Hány csupa páratlan számjegyből álló ötjegyű szám van?
b) Ezek közül hány kezdődik 1-gyel?
c) Hány csupa különböző páratlan számjegyből álló ötjegyű szám van?

a)

A keresett ötjegyű számok száma:	5^5	2 pont	

b)

Az 1 – gyel kezdődő számok száma:	5^4	1 pont	

c)

A különböző páratlan számjegyekből álló ötjegyű számok száma:	**5!**	1 pont	

10. Egy körgyűrűcikk alakú nézőtér első sorában 12 szék van, minden további sorban 3-mal több, mint az előzőben. A nézőtéren összesen 20 sor van. Mennyi az ülőhelyek száma a nézőtéren?

Az ülőhelyek száma:	**810**	3 pont	

A megoldás menete:

$a_1 = 12$; d=3; n=20 számtani sorozat. Meghatározandó S_n *ennek felismeréséért* *1 pont*

A megfelelő képlet(ek)ért *1 pont*

A jó eredményért *1 pont*

II./A rész

11.feladat

Egy osztályban a matematika dolgozat eredményei a következők voltak:

osztályzat	1	2	3	4	5
darabszám	6	4	4	9	5

a) Jellemezze középértékekkel az osztály teljesítményét! Válaszait indokolja!

A számtani közép	**3,1**	3 pont
A módusz	**4**	2 pont
A medián	**3,5**	2 pont

b) A *számtani közepet* úgy számoltam ki, hogy

1 pont	

*Módusz*nak nevezzük a ……………………………………………………

1 pont	

Mediánnak nevezzük a ……………………………………………………

1 pont	

(A képletben vagy szóban helyesen leírt definícióért jár a pont.)
Ha a számolás rossz, de a definíció jó, akkor 1 pont jár

c) *Véleménye szerint* melyik középérték jellemzi leginkább egy osztály teljesítményét?
Válaszát indokolja!
(A logikus indoklásért)

2 pont	

Bármelyik középérték mellett lehet logikusan indokolni! *Logikusnak tekinthető pl.:*

- *A számtani közép, mert sokan írtak jó és sokan írtak rossz dolgozatot, és a csoport így közepes teljesítményű*
- *Vagy: A módusz, mert a sok 4-es és az elég sok ötös miatt ez egy jó csoport.*
- *Vagy: A medián, mert azt mutatja meg, hogy a legtöbben közepes vagy jó dolgozatot írtak,és így ez jellemző a csoportra.*
- *De jó lehet az is, ha a gyerek „kétféle jót” is megjelöl aszerint, hogy kinek –gyereknek vagy tanárnak – a szempontjából nézi, pl. a rossz tanuló gyerek ha 4-est írt, akkor otthon az átlagot mondja el, hogy értékesebbnek tűnjön föl a jegye)*

12.feladat

Egy háromszög csúcsainak koordinátái a derékszögű koordinátarendszerben:
A(0;0), B(10;0) és C(3;4)

a) Számolja ki a háromszög területét!

b) Határozza meg a legnagyobb szöget fokokban!

A háromszög területe	**20 terület egység**	2 pont	

c) Adja meg a C csúcsnak az A csúcsból induló szögfelezőjére vonatkozó tükörképének koordinátáit!

C csúcsnak az A csúcsból induló szögfelezőjére vonatkozó tükörképe:	C′(5;0)	6 pont	

Megoldás:
Ha a megoldás egyébként nem teljes pontszámú, akkor a helyes ábráért lehet 1 pontot adni (Pl. az a) vagy a c) kérdésnél)
a) A terület teljes pontszámú akkor is, ha leolvassa az ábráról.
b)Akár skalárszorzattal, akár cosinus tétellel számolja a szöget, a megfelelő képletért 2 pont és a helyes számolásért 2 pont jár. Ha képletben vagy/és a számolásban hiba van, 1-1 pont is adható. Ha rossz képlettel jól számol, a számolásért járó pontokat megkapja.
c) Annak megállapításáért, hogy a tükörkép az AB oldalra esik, 2 pont jár.(Ha nem írja le, csak a rajzról következtet, akkor ez a két pont ***nem*** *jár)*
A szögfelező egyenletének felírásáért 2 pont jár. (A szögfelező egyenletét pl. két pontból lehet meghatározni úgy, hogy az egyik pont az origó, a másik az a pont- a szögfelező ismert tulajdonsága miatt – amelyben a szögfelező a szemközti oldalt metszi: $(\frac{16}{3};\frac{8}{3})$ *(1 pont). A szögfelező egyenlete: y=0,5x (1 pont)*
A tükörképpont helyes meghatározásáért 2 pont jár: C-ből a szögfelezőre állított merőleges egyenlete: y-4 = -2 (x-3), ennek metszéspontja a szögfelezővel: M(4;2) – eddig 1 pont - ; A tükörkép kiszámítása: $c'_1 = 2 \bullet 4-3=5$; $c'_2=0$ *(Ha jól tükröz és csak leolvassa a pont koordinátáit, ezt a 2 pontot – és csak ezt – megkapja)*
Ha a vizsgázó a tükrözés tulajdonságára hivatkozva (t.i. hogy az AC oldal és a tükörképe egyenlő hosszúak, tehát AC=AC') állapítja meg a tükörkép koordinátáit, megkaphatja a 4 pontot.
Megjegyzés: Az a vizsgázó, aki semmit sem számol, csak ábrát készít, és arról mindent, amit lehet leolvas, a teljes feladatramaximum 2+1+2 pontot kaphat.

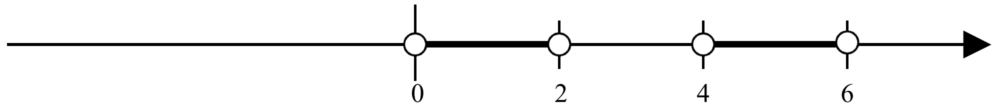
13 feladat

a) Mely valós számok elégítik ki az alábbi egyenlőtlenséget?

$$\log_8 \frac{x^2-2x}{x-3} \langle 1$$

Az egyenlőtlenséget kielégítő valós számok:	**0<x<2 vagy 4<x<6**	8 pont	

b) Ábrázolja a megoldáshalmazt számegyenesen!



2 pont	

c) Írjon fel olyan másodfokú egyenletet, amelynek gyökei egész számok és mindkét gyöke eleme a fenti egyenlőtlenség megoldáshalmazának!

Egy kívánt tulajdonságú másodfokú egyenlet:		2 pont	

Megoldás:

a) A logaritmus definíciója és a 8-as alapú logaritmusfüggvény szigorú monoton növekedése miatt:

$0\langle \frac{x^2-2x}{x-3} \langle 8$ *kell, hogy teljesüljön.:* *2 pont*

Az egyenlőtlenség bal oldalát a 0<x<2 vagy x>3 intervallumok elégítik ki: *2 pont*

Az egyenlőtlenség jobb oldalát kielégítő számhalmazok: x<3 vagy 4<x<6: *2 pont*

A két halmaz közös része a megoldáshalmaz: ***0<x<2 vagy 4<x<6*** *:* *2 pont*

Ha a vizsgázó nem ír szöveget, de mind a négy megoldási egység egyértelműen kiderül a megoldásából, megkaphatja a helyesen számolt egységekért járó pontszámot.

b) A 2 pont csak akkor adható, ha az ábrázolásból kiderül, hogy mindkét végükön nyitott intervallumokról van szó. Ha ez nem derül ki egyértelműen, akkor 1 pont adható.

c) Azok és csak azok az egyenletek jók, amelyek a(x-1)(x-3)=0 alakúak, ahol „a" tetszőleges 0-tól különböző valós szám. Akár szorzat, akárpolinom alakban megadott, bármely konkrét „a" szorzószámmal előállított egyenletért jár a *2 pont.*

II./B rész

14. feladat

a) Határozza meg az **f(x)=** |**x-3**|+|**x+1**|+|**x-2**| függvény értékkészletének legkisebb elemét! Hol veszi fel a függvény ezt az értéket?

A függvény minimuma:	***x= 2. helyen f(2..)= 4 érték***	8 pont	

b) Határozza meg a függvény értelmezési tartománya -1〈x〈2 intervallumához tartozó szakaszának meredekségét!

A keresett meredekség:	***m=-1***	3 pont	

c) Hogyan kell megválasztani a **g(x) = -** |**x-2**|**+ a** függvény hozzárendelési szabályában az **„a"** paraméter értékét, ha azt akarjuk, hogy az f(x) és a g(x) függvények grafikonjának

α) 0 közös pontja legyen	***a<4***	2 pont	
β) 1 közös pontja legyen	***a=4***	2 pont	
γ) 2. közös pontja legyen	***a>4***	2 pont	

Megoldás:

a) Ha a vizsgázó az értelmezési tartomány négy intervallumához tartozó hozzárendelési szabályokat határozza meg, majd ezek segítségével ábrázolja a függvény képét és arról olvassa le a választ, akkor:

- ha x< -1 akkor: f(x)=-3x+4 *1 pont*

-ha -1<x<2 akkor: f(x)=-x+6 *1 pont*

-ha 2<x<3 akkor: f(x)= x+2 *1 pont*

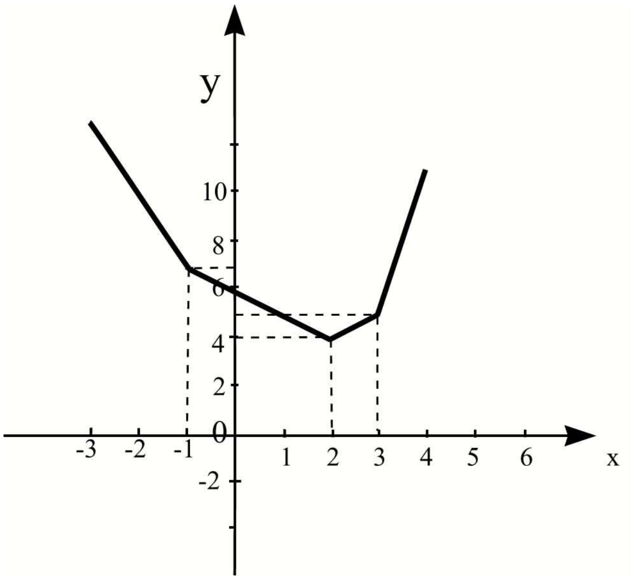
-ha x>3 akkor: f(x)= 3x-4 *1 pont*

Helyes ábra: *3 pont*

A szélsőérték helyes megállapítása *1pont*

b) *Ha a vizsgázó az ábráról leolvassa (nem számolja) a kérdezett meredekséget, 1 pontot kap.*

c) A g(x) = - |x-2|+ a görbesereg ábrázolásáért 1 pont jár, ha a megoldásrészletre (c) egyébként nem kaphatna pontot.



15. feladat

a) Hogyan kell megválasztani a K = $\dfrac{3n+2}{4n+1}$ kifejezésben „n” pozitív egész szám értékét, hogy a tört egyszerűsíthető legyen?!

„n” lehetséges értékei:	n = 5r +1 („r” egész) pl.: n=6,11,16,…	12 pont	

b) Hogyan kell a **p** egész paraméter értékét úgy megválasztani, hogy a T = $\dfrac{pn+1}{4n+1}$ tört semmilyen „n” természetes szám választása esetén se legyen egyszerűsíthető!

A keresett szám	p=3	4 pont	

c) Egy idomított bolhapár ugrál a számegyenesen, de gazdájuk sohasem egy időben küldi pályára őket.. A lány azokra az egész számokra ugrik, amelyek 3-mal osztva 1 maradékot adnak, a fiú pedig csak azokra, amelyek a 4-gyel osztható számok után következő egész számok. Hagyhat-e a fiú levelet a párjának a 2005. osztópontban, és megtalálhatja-e azt a lány?

A lány a levelet a 2005. pontban	**megtalálja** / nem találja meg	5pont	

Megoldás:
a) A tört akkor egyszerűsíthető, ha létezik olyan egész szám, amelynek a számláló is és a nevező is egész számú többszöröse. *(2 pont) Ez a 2 pont akkor is jár, ha szövegesen nem, de a jelölésekben utal az egyszerűsíthetőség feltételére.*
Legyen ez az egész szám **k.**
Ha k│3n+2 és k│4n+1 akkor k│4(3n+2) – 3(4n+1)=5 ⇒ k│5⇒ k=5 *(7 pont)*
Ha 3n+2=5x és 4n+1=5y (x,y egész) akkor **n=5r+1 alakú** *(5 pont)*
Ha a vizsgázó egy konkrét jó „n”-et talál, akkor 1 pontot kaphat. Ha egynél több konkrét példát talál, akkor maximum 3 pontot, ha indoklás és levezetés nélkül „eltalálja” a teljes 6,11,16... sorozatot, akkor 4 pontot kap.
b) Az a) pontban alkalmazott módszerrel az egyszerűsíthetőség feltétele: Létezik k egész szám, hogy k│pn+1 és k│4n+1. Ebből következik, hogy k│4(pn+1)-p(4n+1)= 4-p. *(2 pont)*
k akkor nem valódi osztója a számlálónak és a nevezőnek, ha k=1. Ebből **p=3** *(2 pont)*
c) Akkor hagyhat levelet a 2005.osztópontban a fiú, ha ugrássorozatában benne van ez a pont. A fiú ugrássorozata: 4k+1=2005, ebből k=501, tehát az 501. ugrásával éppen 2005-re ér.
A lány ugrássorozata: 3r+1=2005 ahonnan r=668, tehát 668. ugrásával ő is eléri a 2005-ös pontot.
Tehát **a fiú hagyhat levelet és a lány** megtalálhatja.

(Csak akkor kaphatja meg a vizsgázó a maximális pontszámot, ha a különböző számokat különböző paraméterrel jelöli.) Ha nem jut eredményre, de felismeri, hogy a két kifejezés közös többszöröse 2005, akkor 3 pontot kaphat.

<u>16 feladat</u>

Egy lakásépítéshez valaki 0,5%-os havi kamatra felvesz 10 millió Forintot, amelyet 10 év alatt havi részletekben fizet vissza.
a) Mennyi a havi törlesztő részlet, ha minden hónap végén tőkésítik a kamatot?

A havi törlesztő részlet:	***111020 Ft***	8 pont	

b) Ha kamatot csak év végén számolnak, tehát az év közi befizetések csak egy összegben a következő évben kamatoznak, akkor mennyi lenne a havi részlet? Korrekt eljárás lenne ez a bank részéről?

A havi törlesztő részlet:	***114137 Ft***	4 pont	
A bank részéről az eljárás:	korrekt/***nem korrekt****	2 pont	

∗ ***azért, mert a bank egy évig kamat nélkül használja a betétes pénzét.*** *(indoklás nélkül 1 pont)*

c) Ha öt év (félidő) után már van elég pénze az adósnak és meg akar szabadulni a tartozásától, akkor mennyit kell kifizetnie egy összegben, hogy törlessze a teljes tartozást?

Az egy összegben kifizetendő tartozás:	***5 742633Ft***	3 pont	

Megoldás:
a) Mivel 10 év = 120 hónap, a következő 120 lépéses egyenlet írható fel:
$\langle [(10000000 \bullet 1{,}005 - x) \bullet 1{,}005 - x] \bullet 1{,}005 \ldots \rangle \bullet 1{,}005 - x = 0$ *(4pont)*
Rendezve, x-et kiemelve és a zárójelben lévő összegre alkalmazva a mértani sorozat összegképletét
$10000000 \bullet 1{,}8194 - x\dfrac{1{,}8194 - 1}{1{,}005 - 1} = 0$ *Ebből x=111020 Ft* *(4 pont)*

b) Ha évente tőkésítik a kamatot, akkor az így kapott összeg 12-ed része lesz a havi törlesztő részlet:
$10000000 \bullet \left(1{,}005^{12}\right)^{10} - y\left(1{,}0617^{9} + 1{,}0617^{8} + \ldots + 1\right) = 0$
(mert $1{,}005^{12} = 1{,}0617$) (*2 pont)*
ahonnan y = 1369644, amiből a havi törlesztő részlet: 1369644/12=**114137** Ft (*2* pont)
c) Az a)-beli módszerrel kiszámolva az 5 év múlva fennálló tartozást, **5742 633 Ft** adódik,(tehát nem a felére fogy a tartozás). (*3 pont)*

Középszintű érettségi feladatsorok és megoldásaik
Öszeállította : Hámori Veronika

2. feladatsor

I. rész

1. Egy háromszög két külső szögének összege $\frac{4\pi}{3}$ radián. Mekkora a nem mellettük fekvő belső szög ?

A keresett szög (radiánban**):**		2 pont	

2. Egy 2 egység élhosszúságú kockából kivágunk egy olyan gömböt, amely a kocka minden lapját érinti. Hány százaléka a kocka megmaradt részének térfogata a gömb térfogatának?

A kocka térfogata		1 pont	
A gömb térfogata		1 pont	
A megmaradt rész térfogata a gömb térfogatának:	%-a	1 pont	

3. Hány főből áll az a kiránduló csoport, amely nem fér be egy 20 fős kisbuszba, de elfér egy 50 fős buszban; az étteremben le tudnak ülni a 4 személyes asztalokhoz ebédelni úgy, hogy mindenkinek mind a három asztaltársa is a csoport tagja; de a szállodában, ahol 3 fős reggeliző asztalok vannak, az egyik asztalhoz a csoportból csak két személy jut.

A feltételeknek megfelelő létszám:	;	4 pont	

4. . Egy konvex sokszögben összesen 90 átló húzható. Határozza meg a sokszög oldalszámát!

A konvex sokszög oldalainak száma:		2 pont	
A kiszámításhoz használt képlet		1 pont	

5. Végezze el a kijelölt műveletsort és a lehetséges egyszerűsítéseket az **x**$\in$**R**/{-5;-3;0;3} halmazon!

$$\frac{x^2-25}{x^2-3x}:\frac{x^2+5x}{x^2-9}$$

A kifejezés alakja egyszerűsítés után:		3 pont	

.

6. A közös kezdőpontból induló **a** és **b** vektorok hajlászsöge 60°. Hosszuk: |**a**|=5, |**b**|=8.

a) Számítsa ki a két vektor skalárszorzatát!
b) Számítsa ki az (**a** –**b)** vektor hosszát! Mi a geometriai jelentése?

A vektorok skalárszorzata		1 pont	
(**a** – **b**) vektor hossza		2 pont	
Ábrázolja az **(a** – **b)** vektort!		1 pont	

7. Egy „e” egyenes a derékszögű koordináta rendszer abszcissza tengelyét az A(-3;0) pontban, az ordináta tengelyt a B(0;4) pontban metszi.

a) Írja fel az egyenes egyenletét!
b) Írja fel az origóból az „e”egyenesre állított merőleges „m”egyenes egyenletét!
c) Mekkora szakaszt metsz ki „m” egyenesből az „e” egyenes?

„e” egyenes egyenlete		1 pont	
„**f**” egyenes egyenlete		1 pont	
A kérdezett szakasz hossza:		2 pont	

A megoldás menete:

8. feladat

Egy matematika versenyen két feladatot tűztek ki. Minden induló megoldotta legalább az egyik feladatot, 9-en megoldották mindkettőt. Az első feladatot az indulók 80%-a, a másodikat az indulók fele oldotta meg. Hányan indultak a versenyen?

A megoldáshoz a mellékelt ábrát készítettem/egyenletet írtam fel		2 pont	
A versenyen indulók száma		1 pont	

9. feladat

Megadunk két állítást:
1) Ha egy négyszög paralelogramma, akkor átlói felezik egymást.
2) Ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor a négyszög paralelogramma.

Jelölje a következő állításokat a megfelelő betűjellel: igaz (**i**), vagy hamis(**h**)

- Az 1. állítás a 2. állítás megfordítása.
- A 2. állítás az 1. állítás megfordítása.
- Az 1. állítás igaz, ha a paralelogramma szót téglalapra cserélem.
- A 2. állítás igaz, ha a paralelogramma szót trapézra cserélem.
- Igaz az 1) és 2) állítás is.
- Hamis az 1) és 2) állítás is.

(*Pontozás: 1 jó válasz 0 pont;2-3 jó válasz 1 pont;4-5 jó válasz 2 pont; 6 jó válasz 3 pont)*

10. feladat

.

Oldja meg a következő egyenlőtlenségeket, illetve egyenletet a valós számok halmazán!

a) $8^x = 4$ b) $2^x \langle \frac{1}{16}$ c) $2^{-x} \rangle 16$

Az „a" egyenlet megoldása		1 pont	
A „b" egyenlőtlenség megoldása		1 pont	
A „c" egyenlőtlenség megoldása		1 pont	

II./A rész

11. feladat

Valamely sakkversenyen egy játékosnak a 6. forduló után 4 pontja van. (Győzelemért 1; döntetlenért 0,5; vereségére 0 pont jár) Hányféleképpen állhatott elő ez az eredmény?

…..győztes…döntetlen…vesztes játszma esetén a lehetőségek száma:			
…..győztes…döntetlen…vesztes játszma esetén a lehetőségek száma			
…..győztes…döntetlen…vesztes játszma esetén a lehetőségek száma			
…..győztes…döntetlen…vesztes játszma esetén a lehetőségek száma			

Az összes lehetőségek száma 12 pont
Megoldását indokolja!

12. feladat

Ábrázolja az $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & \text{ha } x > 2 \\ -1 & \text{ha } x = 2 \\ x & \text{ha } x < 2 \end{cases}$ függvény grafikonját!

4 pont	

Hogyan kell megválasztani „**a**” paraméter értékét, hogy a g(x)= **-x + a** függvény grafikonjának f(x) grafikonjával
a) 0 b) 1 c)2 d) 3 közös pontja legyen!

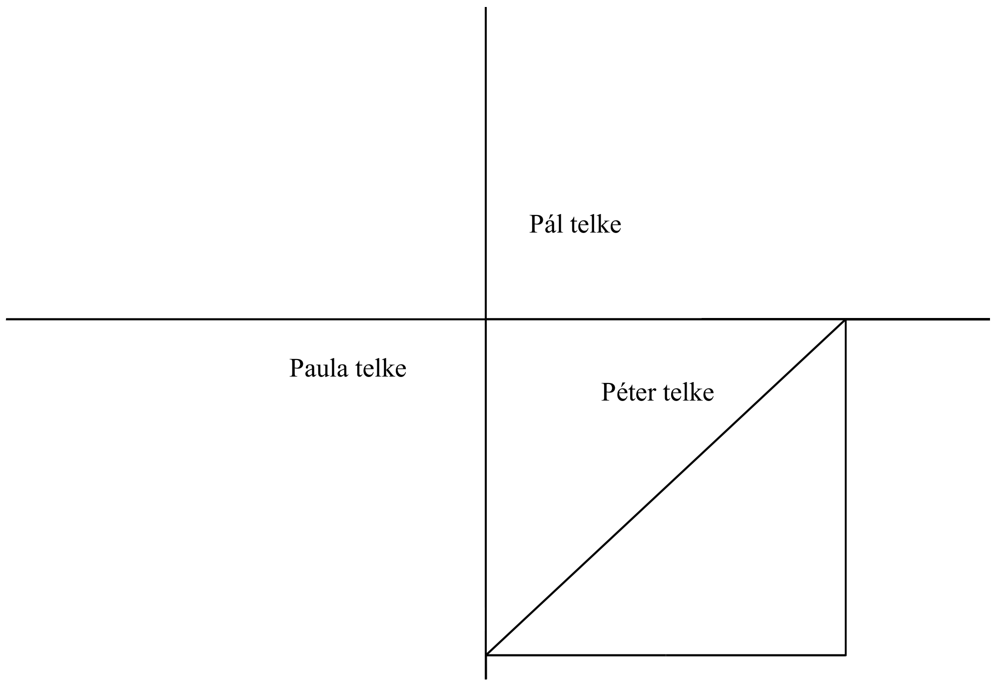
0 közös pont van, ha:	**a**	1 pont	
1 közös pont van, ha:	**a**	3 pont	
2 közös pont van, ha:	**a**	2 pont	
3 közös pont van, ha:	**a**	2 pont	

13.feladat

Péter a kecskéjét a négyzet alakú telke $40\sqrt{2}$ m hosszú átlóval határolt egyik felének egy pontján levert karóhoz kötötte úgy, hogy a kecske által bejárható kör éppen a telek csúcsán menjen át, és a telek képzeletbeli átlóját a felezőpontjában érintse. Ha Péter telkét nem választja el kerítés két szomszédjának, Pálnak és Paulának a kertjétől, a szomszédoknak mekkora földterületét legelheti le Péter kecskéje? A szomszédok kertjéből lelegelt rész hány százaléka a Péter telkéről lelegelt földterületnek?

Az ábra		3 pont	
A kör területe=		1 pont	
A szomszédokhoz átnyúló körrész adatai		5 pont	
A körrészek területe =		2 pont	
A keresett százalék =		1 pont	

Megoldás:



II./B rész

A 14., 15. és 16., feladatok közül tetszés szerint választott kettőt kell megoldania.

14.feladat

Egy derékszögű háromszög csúcsainak koordinátái: A(0;0), B(3;0), C(0;3). Írjunk az ABC háromszögbe olyan egyenlőszárú derékszögű háromszöget, amelynek mindhárom csúcsa az ABC háromszög egy-egy oldalára illeszkedik. A derékszögű csúcsa az AC befogón van, átfogója pedig párhuzamos az AC egyenessel.

a) .Készítsen ábrát!

2 pont	

b) Határozza meg a beírt háromszög csúcsainak koordinátáit

A beírt háromszög csúcsainak koordinátái:		6 pont	

c) Határozza meg a beírt háromszög területét

A háromszög területe		2 pont	

d) Írja fel a beírt háromszögbe írható kör középpontjának koordinátáit

A PQR háromszögbe írható kör középpontja		7 pont	

15.feladat

Oldja meg az alábbi egyenleteket a rendezett valós számpárok halmazán! Ábrázolja a megoldáshalmazokat!

a) $16x^2+(8\sin y)x+1=0$

Az egyenlet megoldáshalmaza:		4 pont	

b) $(2x-1)^2+(2y-1)^2=0$

Az egyenlet megoldáshalmaza		3 pont	

$(2x-1)(2y-1)=0$

Az egyenlet megoldáshalmaza		4 pont	

c) $\dfrac{2x-1}{2y-1}=0$

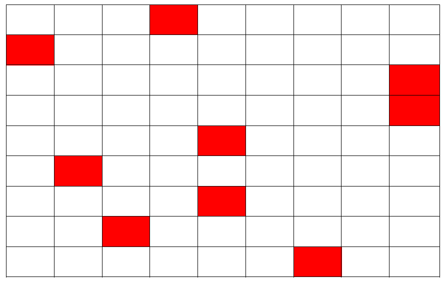
Az egyenlet megoldáshalmaza		3 pont	

d) $\dfrac{2y-1}{2x-1}=0$

Az egyenlet megoldáshalmaza		3 pont	

16. feladat

Egy tréfás kedvű céllövölde tulajdonos a következő módon készített egy 9x9-es céltáblát: Először egységnyi oldalú négyzetekből álló négyzetrácsot készített, majd azt gondolatban felosztotta 3x3-as négyzetekre, majd ezek mindegyikében beszínezett egy-egy egységnyi oldalú kis négyzetet, de mindegyik 3x3-as négyzetben más pozícióját.



Ha a lövéssel próbálkozó játékos színezett négyzetbe talál, ajándékot kap. A befizetett összegért mindenki egy lövéssel próbálkozhatott. A céltábla úgy van elhelyezve, hogy minden lövés a táblára talál, és a tábla minden területének eltalálási valószínűsége a területével arányos.

a) Hányféle céltáblát tud készíteni a céllövöldés ezzel a módszerrel? (Az eredeti táblaméret és a színezett négyzetek számának és méretének megtartása mellett.)

……féle céltábla készíthető	3 pont	

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy valaki egyetlen lövéssel színezett négyzetbe talál?

A kérdezett valószínűség:	2 pont	

c) Ha valaki három lövésre fizet be, mennyi a valószínűsége annak, hogy mindhárom lövése talál? (Az egyszer eltalált egységnégyzet leesik a tábláról, így egy sorozaton belül minden négyzet csak egyszer található el.)

A kérdezett valószínűség:	3pont	

d) Ha valaki három lövésre fizet be, mennyi a valószínűsége annak, hogy az első lövése nem talál, a második talál, a harmadik megint nem talál?

A kérdezett valószínűség:	2 pont	

e) Ha valaki három lövésre fizet be, mennyi a valószínűsége annak, hogy az első két lövés nem talál, a harmadik talál?

A kérdezett valószínűség:	2 pont	

f) Ha valaki három lövésre fizet be, mennyi a valószínűsége annak, hogy egyik lövése sem talál?

A kérdezett valószínűség:	2 pont	

g) Készítsen két koncentrikus körből álló céltáblát, amely külső körének átmérője megegyezik a négyzet alakú céltábla oldalhosszával. A belső kör sugarát válassza meg úgy, hogy abba ugyanolyan valószínűséggel lehessen beletalálni, mint amennyi valószínűséggel a négyzet alakú táblán találatot érhettünk el.

A belső kör sugara:	3 pont	

Hámori Veronika 2. feladatsorának megoldása és pontozási útmutatója

(Tanári példány)

I. rész

1. Egy háromszög két külső szögének összege $\frac{4\pi}{3}$ radián. Mekkora a nem mellettük fekvő belső szög ?

A keresett szög (radiánban)**:**	***π/3 rad***	2 pont	

(Ha fokokban adja meg, nem kaphat pontot)

2. feladat Egy 2 egység élhosszúságú kockából kivágunk egy olyan gömböt, amely a kocka minden lapját érinti. Hány százaléka a kocka megmaradt részének térfogata a gömb térfogatának?

A kocka térfogata	***8 térfogategység***	1 pont	
A gömb térfogata	***4π/3térfogategység****	1 pont	
A megmaradt rész térfogata a gömb térfogatának:	***90,98%*** -a	1 pont	

(∗közelítő érték is elfogadható)

3. feladat Hány főből áll az a kiránduló csoport, amely nem fér be egy 20 fős kisbuszba, de elfér egy 50 fős buszban; az étteremben le tudnak ülni a 4 személyes asztalokhoz ebédelni úgy, hogy mindenkinek mind a három asztaltársa is a csoport tagja; de a szállodában, ahol 3 fős reggeliző asztalok vannak, az egyik asztalhoz a csoportból csak két személy jut.

A feltételeknek megfelelő létszám:	***32 vagy 44***;	2+2 pont	

4. feladat. Egy konvex sokszögben összesen 90 átló húzható. Határozza meg a sokszög oldalszámát!

A konvex sokszög oldalainak száma:	***15***	2 pont	
A kiszámításhoz használt képlet	***n(n-3)/2=az átlók száma***	1 pont	

5. feladat Végezze el a kijelölt műveletsort és a lehetséges egyszerűsítéseket az **x**∈**R**∕{-5;-3;0;3} halmazon!

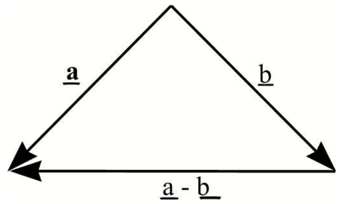
$$\frac{x^2-25}{x^2-3x}:\frac{x^2+5x}{x^2-9}\;||$$

A kifejezés alakja egyszerűsítés után:	***(x-5)(x+3)/x*** ^{2}	3 pont	

.

$$\frac{x^2-25}{x^2-3x}:\frac{x^2+5x}{x^2-9}=\frac{(x-5)(x+5)}{x(x-3)}\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{x(x+5)}$$ *2 pont* *egyszerűsítés 1 pont*

6. feladat A közös kezdőpontból induló **a** és **b** vektorok hajlásszöge 60°. Hosszuk: |**a**|=5, |**b**|=8.
a) Számítsa ki a két vektor skalárszorzatát!
b) Számítsa ki az **(a –b)** vektor hosszát! Mi a geometriai jelentése?

A vektorok skalárszorzata	**ab=5•8•0,5=20**	1 pont	
(**a** –**b**) vektor hossza	$\sqrt{(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2}=\sqrt{25+64-2\cdot 20}=7$	2 pont	
Ábrázolja az **(a – b)** vektort!		1 pont	

7. feladat Egy **„e”** egyenes a derékszögű koordináta rendszer abszcissza tengelyét az A(-3;0) pontban, az ordináta tengelyt a B(0;4) pontban metszi.

a)Írja fel az egyenes egyenletét!

b)Írja fel az origóból az **„e”**egyenesre állított merőleges **„m”**egyenes egyenletét!

c)Mekkora szakaszt metsz ki „m” egyenesből az „e” egyenes?

„e” egyenes egyenlete	***y=4/3x+4***	1 pont	
„**f**” egyenes egyenlete	***y=-3/4x***	1 pont	
A kérdezett szakasz hossza:	***12/5***	2 pont	

A megoldás menete:

a)Bármelyik egyenes egyenlet alapján felírhatja. Csak a hibátlan egyenlet ér pontot.

b) Bármelyik egyenes egyenlet alapján felírhatja. Csak a hibátlan egyenlet ér pontot

c) *Ha ismeri pont és egyenes távolságát, akkor annak alapján is számolhat.*

Ha nem, akkor a koordináta tengelyek és az a) beli egyenes által alkotott derékszögű háromszög területének kétféle felírásából: $3\cdot 4/2=\dfrac{\sqrt{3^2+4^2}\cdot m}{2}$ *, ahonnan m=12/5*

(természetesen bonyolultabb megoldás is elképzelhető) Jó elvi, hibás számolásos megoldásért 1 pont jár.

8. feladat Egy matematika versenyen két feladatot tűztek ki. Minden induló megoldotta legalább az egyik feladatot, 9-en megoldották mindkettőt. Az első feladatot az indulók 80%-a, a másodikat az indulók fele oldotta meg. Hányan indultak a versenyen?

A megoldáshoz a mellékelt ábrát készítettem/egyenletet írtam fel	0,8x +0,5x –x = 9 (Vagy halmazábra)	2 pont	
A versenyen indulók száma	***30***	1 pont	

9. feladat Megadunk két állítást:

1) Ha egy négyszög paralelogramma, akkor átlói felezik egymást.
2) Ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor a négyszög paralelogramma.

Jelölje a következő állításokat a megfelelő betűjellel: igaz (**i**), vagy hamis(**h**)

- Az 1. állítás a 2. állítás megfordítása.	**i**
- A 2. állítás az 1. állítás megfordítása.	**i**
- Az 1. állítás igaz, ha a paralelogramma szót téglalapra cserélem.	**i**
- A 2. állítás igaz, ha a paralelogramma szót trapézra cserélem.	**h**
- Igaz az 1) és 2) állítás is.	**i**
- Hamis az 1) és 2) állítás is.	**h**

(*Pontozás: 1 jó válasz 0 pont;2-3 jó válasz 1 pont;4-5 jó válasz 2 pont; 6 jó válasz 3 pont)*

10. feladat Oldja meg a következő egyenlőtlenségeket, illetve egyenletet a valós számok halmazán!

a) $8^x = 4$ b) $2^x \langle \dfrac{1}{16}$ c) $2^{-x} \rangle 16$

Az „a” egyenlet megoldása	***x=2/3***	1 pont	
A „b” egyenlőtlenség megoldása	***x<-4***	1 pont	
A „c” egyenlőtlenség megoldása	***x<-4***	1 pont	

II./A rész

11. feladat

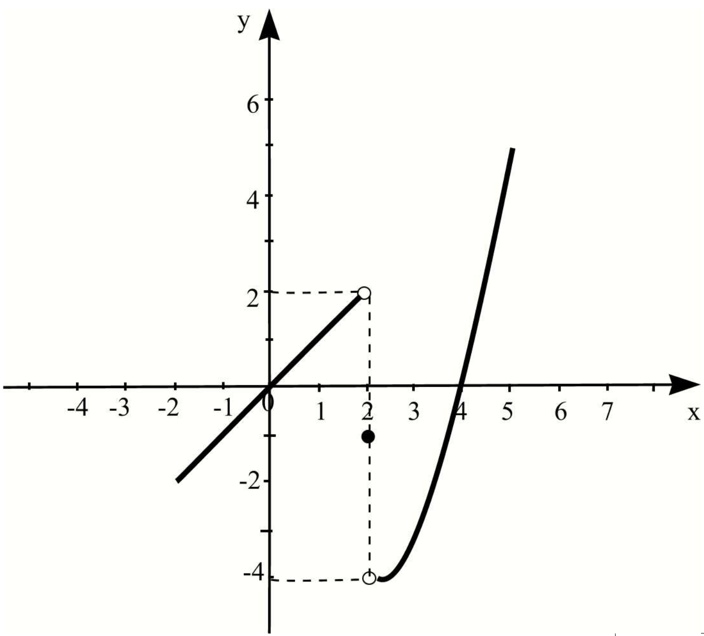
Valamely sakkversenyen egy játékosnak a 6. forduló után 4 pontja van. (Győzelemért 1; döntetlenért 0,5; vereségére 0 pont jár) Hányféleképpen állhatott elő ez az eredmény?

4.győztes ***0***döntetlen ***2***vesztes játszma esetén a lehetőségek száma:	***15***		
3.győztes ***2****döntetlen* ***0*** *vesztes* játszma esetén a lehetőségek száma	***60***		
2.győztes ***4***döntetlen ***0***vesztes játszma esetén a lehetőségek száma	***15***		

Megoldását indokolja!
0 vagy csak 1 győzelem nem lehet.
Mindhárom fenti esetben ***ismétléses permutációról v****an szó*
Akár képlettel számol, akár „leszámolja” a különböző lehetőségeket: egy-egy lehetőség felismeréséért 2 pont, a hibátlan kiszámításáért 2 pont jár.
(*Ha mindhárom lehetőséget megtalálja és megszámolja, megkaphatja a maximális pontszámot)*

12. feladat

Ábrázolja az $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & \text{ha } x > 2 \\ -1 & \text{ha } x = 2 \\ x & \text{ha } x < 2 \end{cases}$ függvény grafikonját!



4 pont	

Nyitott végű parabola darab: 2pont
Nyitott végű félegyenes 1 pont
f(2)=-1 1 pont

Hogyan kell megválasztani „**a**” paraméter értékét, hogy a g(x)= **-x + a** függvény grafikonjának f(x) grafikonjával

a) 0 b) 1 c)2 d) 3 közös pontja legyen!
a) nyilvánvalóan minden valós „a” paraméter esetén metszi az y= -x+ a egyenes a grafikont.
*b****) egy közös pont*** *van mindaddig, amíg az y= -x+a egyenes csak az y=x egyenest metszi. Az „utolsó” ilyen helyzet az, amikor g(x) átmegy a (2;-4) ponton. Ekkor a -2+a=-4 egyenletből*

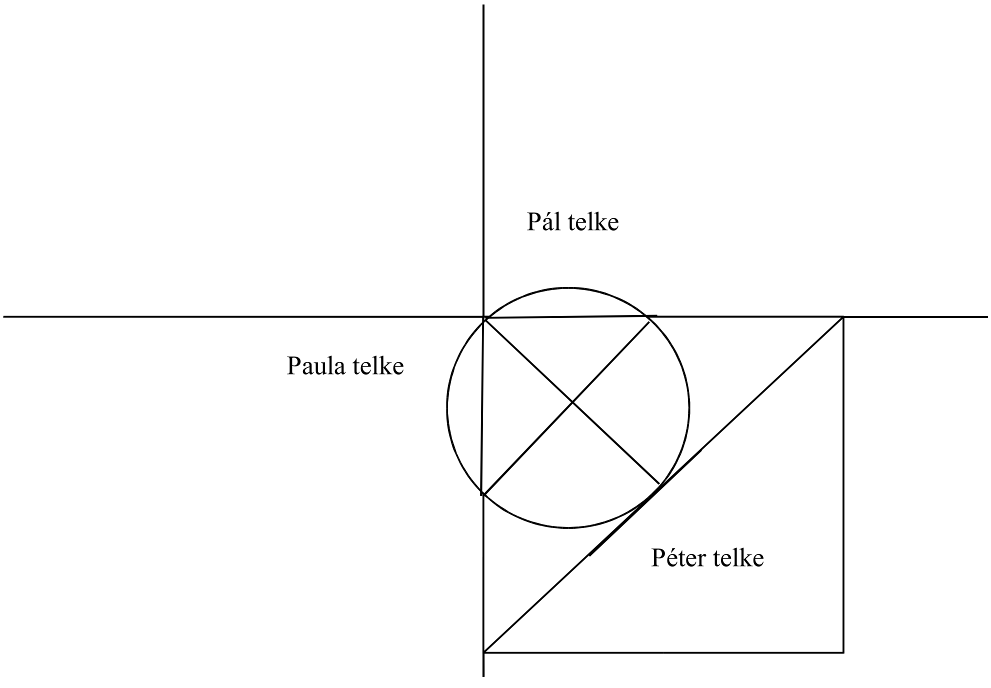
a= -2.Tehát ha ***a*** $\leq$ ***-2****, akkor mindig egy közös pont van. Ismét egy közös pont van attól kezdve ,amint g(x) átmegy az y = x félegyenes nyitott végpontján, azaz a (2;2) ponton. Tehát* ***a*** $\geq$ ***= 4.***
d) ***három közös pont*** *csak akkor van, amikor g(x) átmegy a (2;-1) ponton, (és metszi mind a parabolát, mind az egyenest). Ekkor* ***a=1.***
c) A fel nem sorolt esetekben a két grafikonnak ***két közös pontja*** *van.*

0 közös pont van, ha:	**nincs ilyen eset**	1 pont	
1 közös pont van, ha:	***a*** $\leq$ ***-2 vagy a*** $\geq$ ***4.***	3 pont	
2 közös pont van, ha:	***-2<a<1 vagy 1<a<4***	2 pont	
3 közös pont van, ha:	***a=1***	2 pont	

A teljes pontszám megadható akkor is, ha a vizsgázó a grafikonról olvassa le a paraméter lehetséges értékeit, de ha az intervallumok nyitottságában téved, akkor tévedésenként egy pontot le kell vonni.(Ha nem tudja helyesen leolvasni a paraméter lehetséges értékeit, de berajzolta a g(x) egyenessereg három különböző metszéspont-számú darabját,akkor erre a feladatrészre kaphat összesen legfeljebb 3 pontot)

<u>13.feladat</u>

Péter a kecskéjét a négyzet alakú telke $40\sqrt{2}$ m hosszú átlóval határolt egyik felének egy pontján levert karóhoz kötötte úgy, hogy a kecske által bejárható kör éppen a telek csúcsán menjen át, és a telek képzeletbeli átlóját a felezőpontjában érintse. Ha Péter telkét nem választja el kerítés két szomszédjának, Pálnak és Paulának a kertjétől, a szomszédoknak mekkora földterületét legelheti le Péter kecskéje? A szomszédok kertjéből lelegelt rész hány százaléka a Péter telkéről lelegelt földterületnek?



Az ábra		3 pont	
A kör területe=	***200π***	1 pont	
A szomszédokhoz átnyúló körrész adatai	***r=10√2;*** ***α= π/2***	5 pont	
A körrészek területe =	***100π-200***	2 pont	
A keresett százalék =	***22,2%***	1 pont	

Megoldás:
Péter telke 40 m oldalú négyzet.
A szomszédba átnyúló körszeletek adatai (t.i. hogy negyedkör részei) könnyen leolvashatóak az ábráról, de indoklás vagy számolás nélkül a harmadik egység öt pontjából ***1 pont*** *adható.*

II./B rész

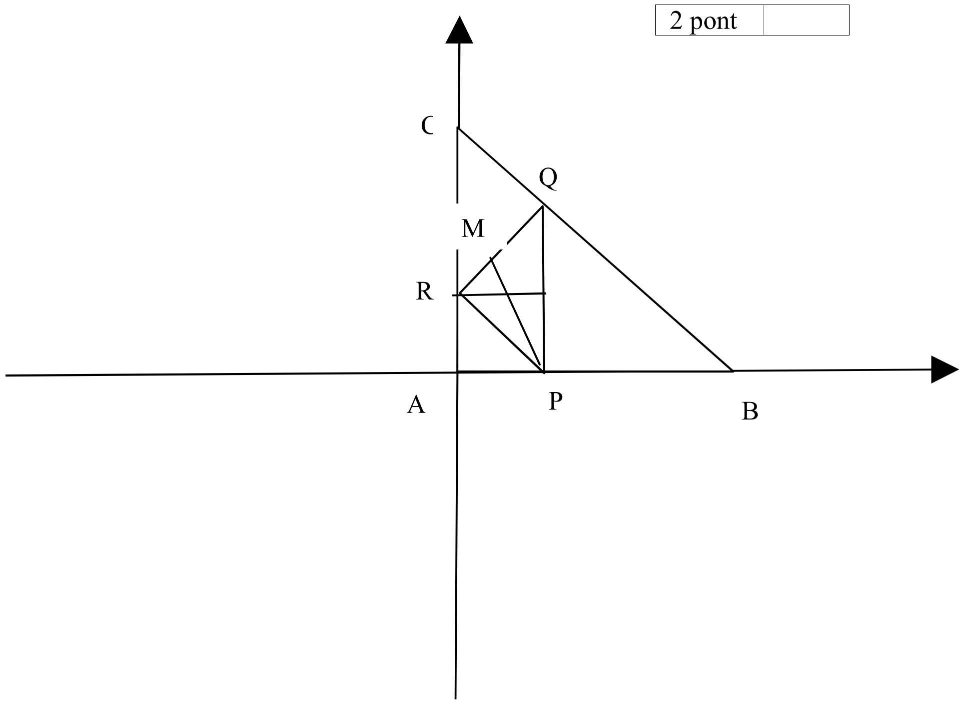
14.feladat

Egy derékszögű háromszög csúcsainak koordinátái: A(0;0), B(3;0), C(0;3). Írjunk az ABC háromszögbe olyan egyenlőszárú derékszögű háromszöget, amelynek mindhárom csúcsa az ABC háromszög egy-egy oldalára illeszkedik. A derékszögű csúcsa az AC befogón van, átfogója pedig párhuzamos az AC egyenessel.

Megoldás:

a) Készítsen ábrát!

2 pont	



b) Határozza meg a beírt háromszög csúcsainak koordinátáit

Mivel PQ párhuzamos AC- vel, PBQ háromszög is egyenlőszárú derékszögű, ezért RQC háromszög és APR háromszög is egyenlőszárú derékszögű háromszögek.
*Ha P(**p;0)**, akkor PR=**p**√2, PQ=**2p,** tehát Q(**p;2**p),R(0**;**p)*
*PB=PQ miatt 3-**p**=2**p**, ahonnan **p=1.***
*A keresett koordináták: **P(1;0);Q(1;2);R(0;1)***

A keresett koordináták	***P(1;0) ; Q(1;2) ; R(0;1)***	6 pont	

Csak leolvasott, indokolatlan értékekért maximum 3 pont adható.

c) Mekkora a beírt háromszög területe?

A háromszög területe	***1 területegység***	2 pont	

d) Írja fel a beírt háromszögbe írható kör középpontjának koordinátáit!

Az R csúcsból induló szögfelező egyenlete: y=1 *1 pont*
A P csúcsból induló szögfelező az RQ szakaszt **√2:2= 1:√2** *arányban osztja.* *1 pont*
*A szögfelező és az oldal metszéspontjának koordinátái :**M(*** $\frac{1}{1+\sqrt{2}};\frac{\sqrt{2}+2}{1+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}$)
2 pont
A P és M pontokon átmenő szögfelező egyenlete: √2x – (√2-2)y =√2 egyszerűsítve√2-vel:
x-(1-√2)y=1 *2 pont*
A két szögfelező metszéspontja: ***K(2-√2;1)*** *1 pont*

Ha a vizsgázó a P pontból induló szögfelező egyenletét a meredekség alapján írja föl (az egyenes az x tengely pozitív irányával 112,5°-os szöget zár be, ennek tangense meghatározható) és közelítő értékkel számol, vagy más módszerrel dolgozik, de közelítő értékkel számol,2 ponttal kevesebbet kap. Aki csak leolvassa a metszéspontot, összesen legföljebb 2 pontot kaphat erre a feladatrészre.(Ugyanennyit kap az a vizsgázó is, aki csak berajzolja a szögfelezőket, de nem olvassa le a metszéspontot)

A beírt háromszögbe írható kör középpontja;	***K(2-√2;1)***	7 pont	

15.feladat

Oldja meg az alábbi egyenleteket a rendezett valós számpárok halmazán! Ábrázolja a b)-e) egyenletek megoldáshalmazát!

a) $16x^2+(8\sin y)x+1=0$

Megoldás:

D= (8siny) ^{2} *- 64*

A valós számok halmazán a megoldhatóság feltétele: D ≥ 0*, (8siny)* ^{2} *- 64* ≥ 0 *ahonnan* *1 pont*

$\sin^2 y \geq 1$ *azaz siny =1 vagy sin y=-1*

amiből: y=π/2 + kπ ahol k egész szám *1 pont*

Ha siny =1 akkor az egyenletbe visszahelyettesítve x= -0,25 és y=π/2 +2 kπ *1 pont*

Ha siny =-1 akkor x=0,25 és y=3π/2 +2 kπ *1 pont*

Megoldás:	***(-0,25, π/2 +2 kπ) vagy (0,25; 3π/2 +2 kπ)***	4 ont	

A következő egyenleteknél az ábrázolásért minden esetben 2 pont jár

b) $(2x-1)^2+(2y-1)^2=0$

Két nemnegatív szám összege akkor és csak akkor 0, ha mindkét tag 0.

Megoldás:	***x =0,5 és y=0,5***	3 pont	

c) (2x-1)(2y-1)=0

Valós számok szorzata akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

Megoldás:	***x=0,5 és y∈R vagy x∈R és y=0,5***	4 pont	

d) $\frac{2x-1}{2y-1}=0$

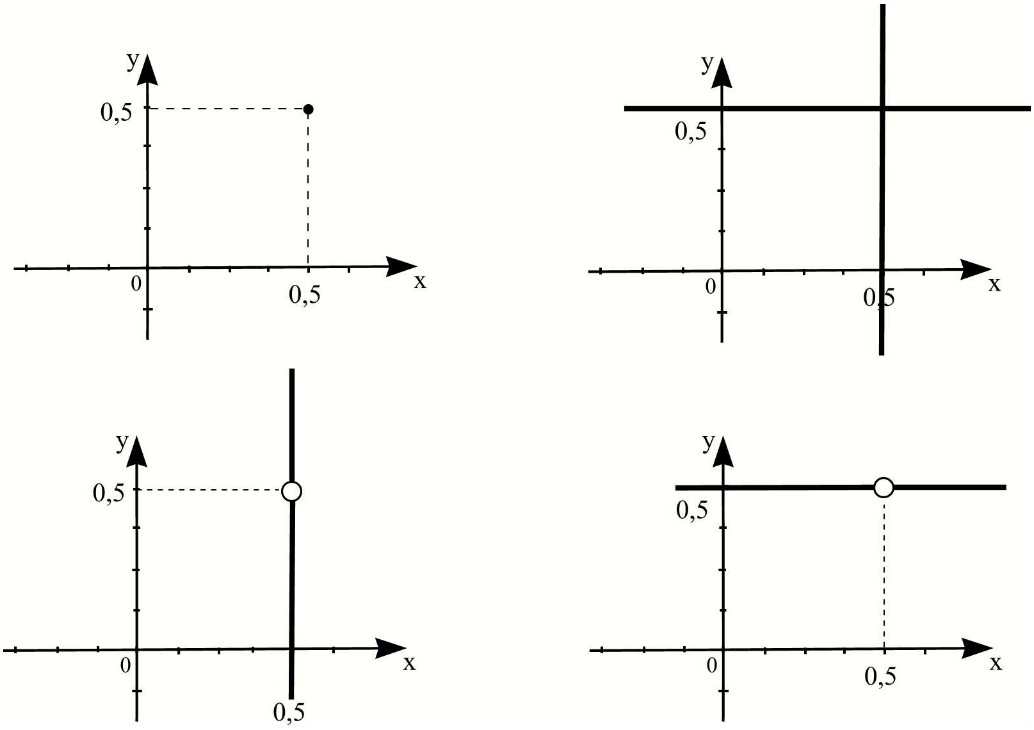
Hányados akkor 0, ha számlálója 0 és a nevező nem.

Megoldás:	***x=0,5 és y∈R és y≠0,5***	3 pont	

e) $\frac{2y-1}{2x-1}=0$

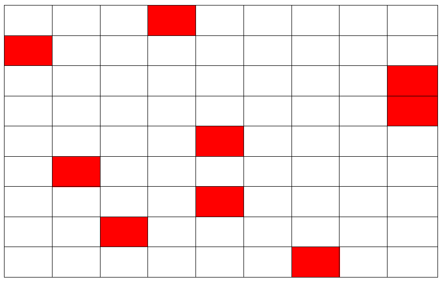
Megoldás:	***x∈R és x≠0,5 és y=0,5***	3 pont	

Ábrák:



16. feladat

Egy tréfás kedvű céllövölde tulajdonos a következő módon készített egy 9x9-es céltáblát: Először egységnyi oldalú négyzetekből álló négyzetrácsot készített, majd azt gondolatban felosztotta 3x3-as négyzetekre, majd ezek mindegyikében beszínezett egy-egy egységnyi oldalú kis négyzetet, de mindegyik 3x3-as négyzetben más pozícióját.



Ha a lövéssel próbálkozó játékos színezett négyzetbe talál, ajándékot kap. A befizetett összegért mindenki egy lövéssel próbálkozhatott. A céltábla úgy van elhelyezve, hogy minden lövés a táblára talál, és a tábla minden területének eltalálási valószínűsége a területével arányos.

a) Hányféle céltáblát tud készíteni a céllövöldés ezzel a módszerrel? (Az eredeti táblaméret és a színezett négyzetek számának és méretének megtartása mellett.)

…*9!*……….féle céltábla készíthető	3 pont	

Ha a szorzat értékét kiírja, de semmi sem utal arra, hogy hogyan jött rá, 2 pontot kap. (A 9!-hoz nem kell magyarázat)

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy valaki egyetlen lövéssel színezett négyzetbe talál?

A kérdezett valószínűség: ***9/81=1/9***	2 pont	

c) Ha valaki három lövésre fizet be, mennyi a valószínűsége annak, hogy mindhárom lövése talál? (Az egyszer eltalált egységnégyzet leesik a tábláról, így egy sorozaton belül minden négyzet csak egyszer található el.)

Az első lövéssel 9/81 valószínűséggel talál. A második lövéssel 8/80 valószínűséggel, a harmadikkal 7/79 valószínűséggel.

A kérdezett valószínűség: **9/81•8/80•7/79= 0,00098**	3 pont	

d) Ha valaki három lövésre fizet be, mennyi a valószínűsége annak, hogy az első lövése nem talál, a második talál, a harmadik megint nem talál?

Az első lövéssel 72/81 valószínűséggel nem színezett négyzetbe talál. Második kísérletre 9/80 valószínűséggel színes négyzetbe talál, végül harmadikra 71/79 valószínűséggel nem színezett négyzetet talál el.

A kérdezett valószínűség: ***72/81•9/80•71/79=0,08987≈0,09***	2 pont	

e) Ha valaki három lövésre fizet be, mennyi a valószínűsége annak, hogy az első két lövés nem talál, a harmadik talál?

Az első lövéssel nem színes négyzetet talál el 72/81 valószínűséggel, a másodikkal 71/80 valószínűséggel ismét nem jó négyzetbe lő, a harmadikra 9/79 valószínűséggel színezett négyzetbe talál.(Ugyanannyi a valószínűség, mint az előző esetben)

A kérdezett valószínűség ***72/81•71/80•9/79≈0,09***	2 pont	

f) Ha valaki három lövésre fizet be, mennyi a valószínűsége annak, hogy egyik lövése sem talál?

A kérdezett valószínűség ***72/81•71/80•70/79=0,699≈0,7***	2 pont	

g) Készítsen két koncentrikus körből álló céltáblát, amely külső körének átmérője megegyezik a négyzet alakú céltábla oldalhosszával. A belső kör sugarát válassza meg úgy, hogy abba ugyanolyan valószínűséggel lehessen beletalálni, mint amennyi valószínűséggel a négyzet alakú táblán találatot érhettünk el.

A külső kör sugara 4,5egységnyi, ezért a kör területe 20,25π
A belső kör területének és a körgyűrű területének aránya 1/9 kell legyen. *1 pont*

$$\frac{r^2\pi}{20{,}25\pi - r^2\pi} = \frac{1}{9}$$ *Ebből* r^2 *=2,025 ahonnan r≈1,423* *2 pont*

A belső kör sugara	***r≈1,423***	3 pont	

Középszintű érettségi feladatsorok és megoldásaik
Összeállította: dr. Surányi László

1. feladatsor

I. rész

1. Egy háromszög szögeinek aránya 2:3:4. Mekkora a legnagyobb szöge?

A háromszög legnagyobb szöge:		2 pont	

2. Idén január elsején évi 6%-os kamatra lekötöttem 120 ezer forintot. Az év végén hány forintom lesz?

Az év végén ennyi pénzem lesz:		2 pont	

3. a) Írja fel a $(\frac{2}{5})^2(\frac{5}{2})^{-3}$ számot úgy, hogy ne szerepeljen benne negatív kitevő!

A keresett alak:		2 pont	

b) 2,5-nek hanyadik hatványa ez a szám?

A szám 2,5-nek ennyiedik hatványa:		2 pont	

4. Adja meg $\log_3(\frac{1}{3})$ pontos értékét.

A pontos érték:		1 pont	

5. Oldja meg a következő egyenletet: $|3x+2| = 8$.

Megoldás:		1 pont	

A megoldás menete: 3 pont

6. Mi a valószínűsége annak, hogy a 90 számos lottón először kihúzott szám osztható öttel, de nem osztható tízzel?

A keresett valószínűség:		1 pont	

Indoklás: 3 pont

7.a) Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely az x-tengelyt a –1,5 abszcisszájú pontban metszi és iránytangense 4.

Az egyenes egyenlete:		2 pont	

b) Mekkora a területe annak a háromszögnek, amelynek három csúcsa az egyenesnek az x-tengellyel és az y-tengellyel vett metszéspontja, valamint az origó?

A háromszög területe:		2 pont	

8. Egy kocka két szomszédos lapközéppontjának távolsága 5 cm. Milyen távol van egymástól a két legtávolabbi csúcsa?

A két csúcs távolsága:		2 pont	

A megoldás menete: 2 pont

9. Adja meg az $x \mapsto x^2 - 8x + 12$ függvény nagyobbik zérushelyét.

A keresett zérushely:		2 pont	

10. Egy 15 tagú társaságban tizen tudnak középszinten angolul, öten tudnak középszinten franciául, és ketten vannak, akik egyik nyelvet sem beszélik középfokon. Hányan beszélik mindkét nyelvet középfokon?

A mindkét nyelvet beszélők száma:		1 pont	

Indoklás 2 pont

II./A rész

11. Milyen magas az a fa, amit egy tőle 5 méterre álló, 5 méter magas dombocskáról 100°-os szögben látni?
12 pont

12. Hányadrésze van meg egy kőzetben az időszámításunk kezdetén még meglevő radioaktív tóriumizotópnak?

(A radioaktív anyagok bomlását az $m = m_0 2^{-\frac{t}{T}}$ egyenlet írja le, ahol m a pillanatnyi tömeg, m_0 a kezdeti tömeg, t az eltelt idő, T pedig az anyag felezési ideje, amely ezen tóriumizotóp esetén 80 ezer év.) 12 pont

13. Oldja meg az alábbi két egyenletet!

a) $\lg x = \lg(x+\sqrt{6}) + \lg(x-\sqrt{6})$ 6 pont

b) $\sqrt{2x+7} = x+2$ 6 pont

II./B rész

A 14., 15. és 16., feladatok közül tetszés szerint választott kettőt kell megoldania.

14. Az öregfiúk sakkcsapatában mindenki legalább ötven éves, és van egy 64 éves is. A csapat átlagéletkora 53 év. A 64 éves csapattag a jövő héten abbahagyja a játékot, ezzel a csapat átlagéletkora 52 évre csökken. Legfeljebb hány éves a csapat legidősebb játékosa? 17 pont

15. Egy háromszög csúcsai az A(4; 6), B(5; –1) és C(–2; –2) pontok. Számítsa ki a magasságpont és a súlypont távolságát! 17 pont

16. Egy hét tagú társaság moziba megy. A harmadik sorba vesznek jegyet, amelyben éppen hét hely van. Tudják, hogy András késni fog, ezért úgy akarnak leülni, hogy az egyik szélső hely neki jusson. 17 pont

a) Hányféleképpen ülhetnek le?

b) Hányféleképp ülhetnek le, ha Pali és Péter egymás mellé akar ülni?

ϴ O O O O O ϴ

dr. Surányi László 1. feladatsorának megoldása és pontozási útmutatója

Az 5., 6., 8. és 10. feladat megoldását kivéve a teljes pontszám jár a jó megoldás puszta közléséért is. A részpontok arra szolgálnak, ha a vizsgázó nem jut jó végeredményre, de egy részt jól old meg vagy jól indokol.

1. A háromszög szögösszege 180°.
Ezt kell 2+3+4 = 9 részre bontani. Egy rész 20°. — 1 pont
A legnagyobb szög: 4x20°=80°. — 1 pont

2. A 120 ezer forint 6%-a 120 000 Ft x 0,06=7 200 Ft, — 1 pont
tehát az év végén ennyivel több pénzem lesz,
ez összesen 127 200 Ft — 1 pont

3. a) $(\frac{5}{2})^{-3} = (\frac{2}{5})^3$ — 1 pont

tehát $(\frac{2}{5})^2(\frac{5}{2})^{-3} = (\frac{2}{5})^2(\frac{2}{5})^3 = (\frac{2}{5})^5$,

a keresett alak: $(\frac{2}{5})^5 = (0,4)^5 = 0,01024$ (Bármelyik alak megfelel.) — 1 pont

b) $(\frac{2}{5})^5 = (\frac{5}{2})^{-5} = 2,5^{-5}$, tehát a –5-ödik hatványról van szó. — 2 pont

4. $\log_3(\frac{1}{3}) = \log_3 3^{-1} = -\log_3 3 = -1$ a keresett pontos érték. — 1 pont
A két pont jár akkor is, ha más úton jut el a pontos értékhez a tanuló.

5. Megoldás két esetben lehetséges: — 1 pont
ha $3x+2=8$, ekkor $x=2$, ez valóban megoldás — 1 pont
ha $3x+2=-8$, ekkor $x=-5$, ez is megoldás. — 1 pont
Az egyenletnek tehát két megoldása van: $x=2$ és –5. — 1 pont

6. A feltételnek azok a számok felelnek meg, amelyek ötre végződnek, — 1 pont
ilyen szám 1 és 90 között kilenc van — 1 pont
a valószínűség a jó esetek és összes esetek hányadosa: — 1 pont
a keresett valószínűség: 9/90=0,1 — 1 pont

7. a) Az egyenes alakja: $y = 4x + c$ — 1 pont
c értéke abból számolható ki, hogy $x=-1,5$-re $y=0$: $c=6$.
Tehát az egyenes egyenlete: $y = 4x + 6$. — 1 pont
b) Az $y = 4x + 6$ egyenes az y tengelyt a (0; 6) pontban metszi — 1 pont
Az $A(-1,5; 0)$, $B(0; 6)$, $O(0; 0)$ pontok által határolt háromszög derékszögű, két befogója AO és BO, ezek hossza 1,5 és 6, így a háromszög területe: $T=1,5 \cdot 6/2=4,5$ egység. — 1 pont

8. Ha a két lapközéppont K és L, a két szomszédos lap az $ABCD$ és az $ABEF$ lap, akkor a KL szakasz például az ACE háromszög középvonala, tehát a CE szakasz hossza KL kétszerese, CE=10 cm. — 1 pont

A CE szakasz egy lapátló, a kocka éle ennek $\sqrt{2}$-ed része: $\frac{10}{\sqrt{2}}$ cm. A kocka átlója Püthagorász tétele szerint a lapátló és az él négyzetösszegének négyzetgyöke: — 1 pont

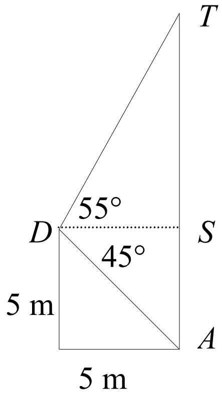
Tehát a lapátló hossza: $\sqrt{150}$ cm = $5 \cdot \sqrt{6}$ cm. — 2 pont

9. A másodfokú függvény két zérushelye a megoldóképlet szerint $x=2$ és 6. — 1 pont
A nagyobbik zérushely: $x=6$ — 1 pont

10. Összesen 13-an beszélnek legalább az egyik nyelvet. 1 pont
Közülük tizen beszélnek angolul, öten franciául, ez 15 ember lenne,
Azokat számoltuk kétszer, akik mindkét nyelvet beszélik. 1 pont
Ezek száma tehát 15–13=2. 1 pont

II./A rész

11. A helyes ábráért 3 pont



A fa talppontja A, teteje T, a dombocskával egy magasságban levő pontja S. $DS = SA = 5$ m, ezért az ASD háromszög derékszögű, egyenlőszárú háromszög, az ASD szög is 45°-os. Az ADT szög a feladat szerint 100°, ezért az SDT szög 55°-os. 4 pont

Az $ST/SD = \text{tg } SDT\angle$, így az ST szakasz hossza $SD \text{ tg } SDT\angle$. 3 pont

A fa magassága tehát $AS + ST = 5 + 5 \text{ tg } 55° \approx 12{,}1407$ m. 2 pont

12. A feladat szerint $T = 80\,000$ (év), $t = 2004$ (év), tehát $-t/T = -0{,}02505$. 3 pont

A feladat az m/m_0 arányt kérdezi. 3 pont

Ez az arány a feladatban megadott képlet szerint  . 3 pont

A kőzetben tehát a tóriumizotópnak még kb. 98,28%-a van meg. 3 pont

13. a) A logaritmus függvény csak pozitív számokra értelmes, ezért az egyenletnek 1 pont

A logaritmus azonosságait használva az egyenlet

$\lg x = \lg (x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})$ alakba írható. 1 pont

A logaritmus függvény szigorú monotonitása miatt a lg mindkét oldalon elhagyható:

$x = (x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})$. 1 pont

A jobb oldalon elvégezve a szorzást és egy oldalra rendezve az

$0 = x^2 - x - 6$

egyenlethez jutunk. 1 pont

Ennek két megoldása $x = -2$ és $x = 3$, ebből a feltételnek csak az $x = 3$ felel meg. 1 pont

A feltétel mellett ekvivalens átalakításokat végeztünk, így $x = 3$ valóban megoldás. 1 pont

b) A négyzetgyök alatt nem állhat negatív szám, ezért $x \geq -3{,}5$.
A bal oldal nem negatív, így a jobb oldal sem, tehát $x \geq -2$. 1 pont*

Négyzetre emelhetünk, s a kikötések mellett ez ekvivalens lépés:

$2x + 7 = x^2 + 4x + 4$. 2 pont

Rendezés után:

$0 = x^2 + 2x - 3$,

ennek megoldásai $x = 1$ és $x = -3$. 2 pont

Az $x = -3$ nem felel meg a kikötésnek, tehát hamis gyök. Az egyenlet megoldása $x = 1$. 1 pont*

*A *-gal jelölt 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó nem tesz kikötéseket, hanem a végén ellenőrzi a megoldásokat és úgy zárja ki az $x = -3$ esetet. Ha csak az $x \geq -3{,}5$ kikötést veszi észre és a hamis gyököt megtartja a végén, akkor a két pontból csak az egyik adható meg.*

II./ B rész

14. Ha a csapattagok száma x, akkor ezek életkorának összege $53x$. 2 pont

Ha a 64 éves csapattag kiszáll, akkor a csapattagok életkorának összege $53x - 64$ lesz. 2 pont

Az életkor átlaga 52 lesz, tehát másrészt a csapattagok életkorának összege $52(x-1)$ lesz. 3 pont

E két mennyiség egyenlő:

$52x - 52 = 53x - 64$, 2 pont

s innen $x = 12$. 1 pont

Legyen a legidősebb csapattag életkora y év. Rajta kívül van egy 64 éves csapattag és a többi tíz csapattag legalább ötven éves. Ez azt jelenti, hogy az életkorok összege – ami $53\cdot12$ – legalább

$10\cdot50+64+y \leq 53\cdot12$. 3 pont

Innen $y \leq 72$. A legidősebb csapattag tehát legfeljebb 72 éves. 2 pont

Ennyi lehet is, ha rajta kívül és a 64 évesen kívül a többi csapattag mind pont ötven éves. 2 pont

15. A súlypont $S(\frac{7}{3};1)$. 3 pont

A magasságpontot két magasságvonal egyenesének metszéspontjaként kapjuk. 2 pont

Az A csúcsból induló magasságvonal normálvektora lehet a $\overrightarrow{CB}(7;1)$ oldal, így egyenesének egyenlete:

$7x + y = 34$. 3 pont

Ugyanígy a B csúcsból induló magasságvonal egyenesének egyenlete:

$3x + 4y = 11$. 3 pont

A két egyenes metszéspontja $M(5;-1)$. 3 pont

Az MS távolság ennek alapján: $\frac{10}{3}$ 3 pont

Megjegyzés: Ha a vizsgázó észreveszi, hogy a háromszög a B csúcsnál derékszögű és a magasságpontot rögtön ebből megkapja, akkor megkapja a kiszámításáért járó 9 pontot, de csak akkor, ha ezt nem az ábráról olvassa le, hanem valahogyan, például az oldalvektorok merőlegességével igazolja.

16. András mindkét esetben két helyre ülhet: a jobb szélre, vagy a bal szélre. 2 pont

a) esetben a többi hat ember bárhogyan leülhet a maradó hat székre, ez 6! = 720 lehetőség. 2 pont

Összesen tehát ennek kétszerese a lehetőségek száma: 1440. 2 pont

b) esetben először hagyjuk ki Pétert. Nélküle öt embert kell leültetnünk. 4 pont

Ezt 5!=120 féleképp tehetjük meg. 2 pont

Utána Pált Péter bármelyik oldalára beültethetjük, ez már 240 lehetőség. 3 pont

András vagy a bal, vagy a jobb szélen kap helyet, ez újabb két lehetőség minden esetben.

Összesen tehát 480 lehetőség van. 2 pont

Középszintű érettségi feladatsorok és megoldásaik

Összeállította: dr. Surányi László

2. feladatsor

I. rész

1. Mely számokra teljesül az $\frac{5}{6-x} > 0$ egyenlőtlenség? 2 pont

2. Milyen maradékot ad hárommal osztva az első ötven (pozitív) prímszám szorzata? 2 pont

3. Egy 7 dl-es üveg 13%-os bor és egy háromnegyed literes üveg 12%-os bor közül melyiknek nagyobb az alkoholtartalma? 3 pont

4. Melyik nagyobb: $(\frac{3}{5})^{-2}$ vagy $\log_2 8$? 1 pont

Indoklás: 3 pont

5. Oldja meg a $|4x+8| = 2$ egyenletet! 2 pont

6. Egy harminc méter átmérőjű rönkfából akarunk kivágni egy téglalap keresztmetszetű gerendát. Azt szeretnénk, ha a téglalap két oldala 20 méter és 21 méter lenne. Lehetséges-e ez? 1 pont

Indoklás: 3 pont

7. Az *ABC* hegyesszögű háromszög *B* csúcsából induló magasság az *AB* oldallal 25°-os szöget zár be, az *AC* oldallal 45°-os szöget zár be. Mekkorák a háromszög szögei? 1 pont

Indoklás: 3 pont

8. Mely pontokban metszi egymást az $y = x^2 - 3$ parabola és az $y = -2x$ egyenes? 3 pont

9. Amikor András autót vett, tudta, hogy olyan rendszámot fog kapni, amelynek három betűjele EDE. Mi a valószínűsége, hogy az utána álló három szám között van ismétlődés? (Feltesszük, hogy minden rendszámot kiadnak, beleértve a 000 rendszámot is.) 1 pont

Indoklás: 3 pont

10. Egy urnában két fehér és egy piros golyó van. Hány piros golyót kell hozzátennünk, ha azt akarjuk, hogy a fehér golyó húzásának valószínűsége 1/3 legyen? (Fehér golyót nem tehetünk hozzá.) 2 pont

A II./A és II.B részek azonosak Surányi László 1. feladatsorának II. részével

Dr. Surányi László 2. feladatsorának megoldása és pontozási útmutatója

Megoldások:

1. Az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha a nevező pozitív, azaz ha $x<6$. 2 pont

2. Az első ötven prím között szerepel a 3 is (a második prím), ezért ez a szorzat osztható hárommal. A szorzat hármas maradéka tehát 0. 2 pont

3. 7 dl 13%-os alkoholtartalmú borban $700 \cdot 0,13$ milliliter alkohol van, ez 91 ml. 1 pont

Háromnegyed liter 12%-os alkoholtartalmú borban $750 \cdot 0,12$ ml alkohol van, ez 90 ml. 1 pont
Tehát a 7 dl-es üveg alkohol tartalma a nagyobb (1 milliliterrel). 1 pont

4. $\log_2 8$ a nagyobb. 1 pont

Indoklás:

$$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3\log_2 2 = 3,$$ 1 pont

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9},$$ 1 pont

$$\frac{25}{9} < \frac{27}{9} = 3.$$ 1 pont

5. Ha $4x + 8$ nem negatív, akkor a $4x + 8 = 2$ egyenlet gyökét keressük, ami $x = -1,5$.
Ez jó megoldás. 1 pont
Ha $4x + 8$ negatív, akkor a $4x + 8 = -2$ egyenlet gyökét keressük, ami $x = 2,5$. Ez is jó megoldás.
1 pont

6. A kívánt keresztmetszetű gerenda kivágható. 1 pont

Indoklás:

A feladat akkor megoldható, ha a téglalap átlója legfeljebb akkora, mint a rönkfa átmérője. 1 pont

A téglalap átlója a Püthagorász-tételből $\sqrt{20^2 + 21^2} = \sqrt{841} = 29$ [méter]. A kívánt keresztmetszetű gerenda tehát kivágható. 2 pont

7. Jelölje a magasság talppontját *T*! *T* az *AC* oldal belső pontja, mert a háromszög hegyesszögű. Ugyanezért a *B*-nél fekvő szög a megadott két szög összege, tehát 70°. 1 pont

Az *ABT* derékszögű háromszög *ABT* szöge 25°-os, *T*-nél derékszög van, tehát *A*-nál 65°-os szög van, ez a háromszög *A*-nál fekvő szöge. Ugyanígy a *CBT* derékszögű háromszögben *T*-nél derékszög van, *B*-nél 45°, így a *C*-nél fekvő szög is 45°. 2 pont

A háromszög három szöge: 70°, 65° és 45°. 1 pont

8. A parabola és az egyenes olyan pontokban metszi egymást, amelyek abszcisszájára fennáll az $x^2 + 2x - 3 = 0$.
1 pont

Tehát $x = 1$ vagy $x = -3$. 1 pont

Előbbi esetben $y = 1^2 - 3 = -2$, utóbbi esetben $y = (-3)^2 - 3 = 6$.

Tehát a két metszéspont $(1; -2)$ és $(-3; 6)$. 1 pont

9. Az olyan rendszámok száma, amelyekben nincs ismétlődés: $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. 1pont*

Az összes rendszám száma 1000, az olyan rendszámok száma, amelyekben van ismétlődés: 1000–720=280.
1 pont*

Ezért a keresett valószínűség 280/1000=0,28. 2 pont

Az első két pont jár akkor is, ha a tanuló másképp jut az eredményhez. Például:

Az egyes négyféleképp ismétlődhet: az első és második helyen, az első és harmadik helyen, a második és harmadik helyen, továbbá szerepelhet mind a három helyen egyes. Az utolsó esetből csak egy van. A többi esetben a fennmaradó harmadik számjegy 9 féle lehet. Ez összesen $1+3\cdot 9=28$ lehetőség.
Ugyanígy számolható ki az, hogy hányféleképp ismétlődhet a nulla, a kettes, a hármas, …, a kilences. Ez összesen 280 lehetőség (két különböző számjegy nem ismétlődhet).

10. Kétszer annyi piros golyónak kell lennie, mint fehérnek, tehát négy piros golyónak kell lennie az urnában. Három piros golyót kell beletennünk. 2 pont

A II./A és II.B részek azonosak Surányi László 1. feladatsorának II./A illetve II./B részével.

Középszintű érettségi feladatsorok és megoldásaik

Összeállította: Szászné Simon Judit

1. feladatsor

I. rész

1. Jelölje H az egyjegyű prímszámokat! Hány olyan részhalmaza van H-nak, amelynek 3 eleme van?

   2 pont

2. Egy henger alakú csövön, melynek belső átmérője 7cm, víz folyik keresztül, melynek sebessége 5m/sec.

   Mennyi víz folyik ki a csövön 1 perc alatt?

   2 pont

3. Mi a következő függvény értelmezési tartománya?

   $x \mapsto \sqrt{\dfrac{3}{3x-2}}$ 2 pont

4. A 12. évfolyam 30 lány és 40 fiú tanulója közül néhányan színházba mentek. A lányok 60, a fiúk 25 százaléka ment el. Az évfolyam hány százaléka volt színházban?

   3 pont

5. Legyen A(0; 0), B(0; 1) és C(4; 4). Határozzuk meg a háromszög kerületét és területét!

   4 pont

6. Egy kertben palántákat ültetünk. Az első sorba 18 palánta fér el, minden további sorban pedig 2-vel több, mint az előzőben.
   Hány palántát ültettünk a 15. sorba? 2 pont

   Hány palántát ültettünk el összesen? 2 pont

7. Mi a következő állítás tagadása?
   „A szóbeli vizsga júniusban lesz."
   i. A szóbeli vizsga májusban lesz.
   ii. Az írásbeli vizsga lesz júniusban.
   iii. Nem júniusban lesz a szóbeli vizsga.
   iv. Nem júniusban lesz az írásbeli vizsga.

   2 pont

8. Milyen számjegyre végződik 37^{162} ? 3 pont

9. Egy 15 m szélességű úton az út szélén álló két szemközti oszlopra kifeszített acélhuzalra lámpát függesztettek. A lámpa lehúzza az acélhuzalt, ezért fél méterrel alacsonyabbra kerül, mint a lámpa rögzítési pontja. Milyen hosszú a huzal?

   3 pont

10. Egy baráti társaság 2 mozijegyet kap a bemutató előadásra, amelyeket egymás között kisorsolnak. Hány tagú a társaság, ha a sorsolásnak 45 féle különböző eredménye lehet? (Egy ember csak egy jegyet kaphat.)

    3 pont

    Hány eredmény lehetne, ha egy ember több jegyet is kaphatna?

    2 pont

II./A rész

11. A 180 méter magas megfigyelőtoronyban lévő őr gyanús csónakot vesz észre a tengeren 29°-os depressziós szög alatt. Kis idő elteltével 200 méterrel közelebb van a csónak a torony lábához. Mekkora most a depressziós szög? 12 pont

12. Oldja meg a következő egyenleteket!

a. $\sqrt{(2x-3)^2} = 3x+2$ 6 pont

b. $\log_2 \sqrt{(x+3)} + \frac{1}{2}\log_2(2x-1) = 1$ 6 pont

13. Húzzunk ki egy csomag 32 lapos magyar kártyából egy lapot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kihúzott lap
a) piros;
b) 7-es;
c) piros vagy 7-es?

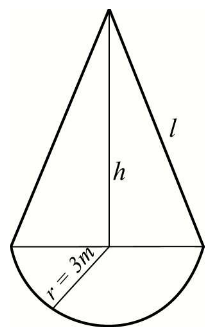
12 pont

II./B rész

A 14., 15. és 16., feladatok közül tetszés szerint választott kettőt kell megoldania.

14. Egy gáztartály egy kúp és egy 3 m sugarú félgömb összehegesztésével keletkezett.
    a. Mekkora a kúp magassága, ha a félgömb térfogata másfélszerese a kúpénak?
    b. Hány m^3 gázt tárolhatunk a tartályban?
    c. Hány doboz festéket kell vennünk a tartály felületének befestéséhez, ha egy doboz festék 4 m^2 lefestéséhez elegendő?

17 pont



15. Egy 30 méter széles csarnok fölé egy parabola ív alakú tetőt építettek. A függvény, amely a parabolát leírja: $h(x) = -\frac{4}{125}x^2 + 20$, ahol h(x) a magassága az ívnek, és x-et a csarnok közepétől mérjük.
    a. Milyen magasra emelkedik a tető?
    b. Mennyivel nyúlik túl a tetőszerkezet a talajon a csarnok oldalfalától?
    c. Milyen magas lehet maximum a csarnok oldalfala?

17 pont

16. Adjunk meg 13 darab pozitív egész számot úgy, hogy a mediánja 2, az átlaga 2000 legyen! Létezik-e ilyen sokaság, ha azt is megköveteljük, hogy egyetlen módusza legyen, és annak értéke
    a.) 1
    b.) 2
    c.) 6000 legyen?

    d.) Mennyi lehet maximum a módusz? 17 pont

Szászné Simon Judit 1. feladatsorának megoldása és pontozási útmutatója

I. rész

1. H={2; 3; 5; 7} , és egy 4 elemű halmaznak 4 darab 3 elemű részhalmaza van. 2 pont

2. $V = 3,5\,\text{cm}^2 \cdot \pi \cdot 500\,\text{cm/s} \cdot 60\,\text{s} = 367500\pi\,\text{cm}^3/\text{min} \approx 1155\ \text{liter/perc}$ 2 pont

3. A nevező nem lehet nulla, és csak nemnegatív számnak van négyzetgyöke.

   Ezért $3x - 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{2}{3}$ 2 pont

4.

Összesen $0,6 \cdot 30 = 18$ lány 1 pont

és $0,25 \cdot 40 = 10$ fiú ment színházba. 1 pont

Tehát 28 fő a 70-ből, ami 40 %. 1 pont

5.

AB=1 BC=$\sqrt{(4-0)^2 + (4-1)^2} = 5$ AC=$\sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ 2 pont

K= 6+$4\sqrt{2}$ T=$\frac{AB \cdot m_{AB}}{2} = \frac{1 \cdot 4}{2} = 2$ 2 pont

6.

Egy számtani sorozat 15. elemét és első 15 elemének összegét keressük. $a_1=18$; $d=2$

$a_{15}=18+14 \cdot 2 =46$ 2 pont

$S_{15}=\frac{15(18+46)}{2} = 480$ palántát ültettünk el összesen. 2 pont

7.

Az állítás tagadása : Nem júniusban lesz a szóbeli vizsga. 2 pont

8.

$37^{162} = \left(37^4\right)^{40} \cdot 37^2$; és 37^2 utolsó számjegye 9 . 1 pont

Mivel 37^4 egyre végződik, így 40. hatványa is 1-re végződik, tehát a kettő szorzata 9-re végződik. 2 pont

9.

Legyen a huzal hossza 2x. Ekkor a Pitagorasz tétel szerint :

$x = \sqrt{7,5^2 + 0,5^2} = 7,516$ 2 pont + 1 pont

$2x \approx 15,03\ \text{m}$

10.

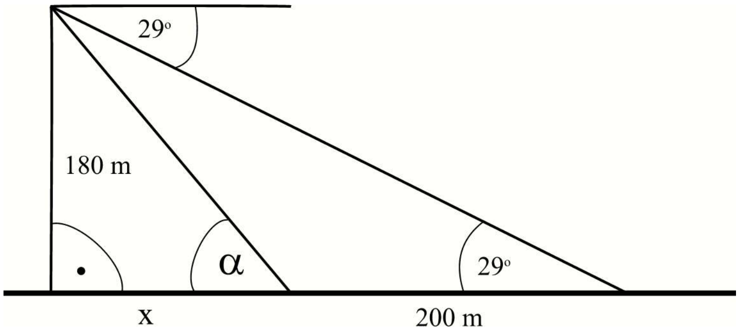
Ha n fős a társaság, akkor a sorsolásnak $\frac{n(n-1)}{2}$ féle különböző eredménye lehet, ami a feltétel szerint 45. 2 pont

Az egyenletet megoldva csak a pozitív gyök értelmes, tehát n=10. 1 pont

Ha egy ember több jegyet is kaphatna, akkor az előző esetekhez még hozzá kell adni n esetet, amikor ugyanaz az ember kapta mindkét jegyet, tehát $\frac{n(n+1)}{2}$ eredmény lehetne. 2 pont

II./A rész

11.



Helyes ábra készítése az adatokkal 2 pont

Az ábráról leolvasható, hogy $\operatorname{tg} 29° = \frac{180}{x+200}$, ahonnan x=124,7 m. 6 pont

Mivel $tg\,\alpha = \frac{180}{x} = 1{,}443$ $\alpha = 55{,}28°$ 4 pont

12.

a, $\sqrt{(2x-3)^2} = |2x-3|$ 2 pont

2x – 3 = 3x + 2 x= -5 hamis gyök 2 pont

–2x + 3 = 3x + 2 x=0,2 jó megoldás 2 pont

b, $\log_2\sqrt{(x+3)} + \frac{1}{2}\log_2(2x-1) = 1$ egyenlet akkor értelmes, ha x>0,5. 1 pont

Felhasználva a logaritmus azonosságait $(x+3)(2x-1) = 2^2$, 2 pont

ahonnan elvégezve a műveletet és a másodfokú egyenletet megoldva

x_1 =1 , ami jó megoldás, 2 pont

vagy

x_2 =- 3,5 , ami hamis. 1 pont

13.

a) 0,25, mert 4 szín van. 3 pont

b) A 32 lap között 4 darab hetes van, tehát 1/8=0,125 4 pont

c) 11 olyan lap van, ami piros vagy hetes, ezért $\frac{11}{32}$, (amit úgy is megkaphatunk, hogy

P(A+B)=P(A)+P(B)- P(A·B)=0,25+0,125 - $\frac{1}{32}$.) 5 pont

II./B rész

14.

a. $\frac{2\pi}{3}r^3 = \frac{3}{2}\cdot\frac{r^2\pi}{3}\cdot h \quad\Leftrightarrow\quad h = 4\,m$.

b. $V = \frac{2\pi}{3}r^3 + \frac{\pi}{3}r^2h = 30\pi \approx 94{,}25\,m^3$

c. $A = \pi\cdot r\cdot a + 2\pi\cdot r^2 = 33\pi \approx 103{,}7\,m^2$. Tehát 26 doboz festék kell.

15. A parabola lefelé nyitott.
    a. A kérdésre a válasz a nulla helyen vett helyettesítési érték, tehát $h(0)=20$ méter.
    b. Meg kell nézni, hol lesz h(x) értéke nulla. Ez $x=\pm 25$ méternél lesz, tehát a két pont egymástól 50 m távol van. A csarnok szélessége 30 m, tehát mindkét oldalon 10-10 m-rel nyúlik túl a tető.
    c. A csarnok oldalfala olyan magas lehet, mint amekkora a parabola értéke az $x=\pm 15$ m pontban. Ez $h(15)=-\frac{4\cdot 15^2}{125}+20=12{,}8\,\text{m}$

16. A feltételek szerint a nagyság szerint rendezett minta hetedik eleme 2, az elemek összege $13\cdot 2000=26000$.
    a. Ha az egyetlen módusz az 1, akkor például kielégíti a feltételeket a következő számsorozat: 1;1;1;1;1;1;2;2;2;2;2;12992;12992.
    b. Ha az egyetlen módusz a 2, akkor például kielégíti a feltételeket a következő számsorozat: 2;2;2;2;2;2;2;2;2;2;2;2; 25982.
    c. A számok között az egyes és a kettes közül legalább az egyikből négy darab van. Ha az egyetlen módusz a 6000, akkor abból legalább ötnek kell lennie, de akkor a számok összege már több, mint 26000, ami ellentmondás.
    d. Nem lehet a számok között hat darab 1-es, mert akkor a keresett szám nem az egyetlen módusz. Öt darab 1-esnél hat egyforma elem kell, és ennek maximuma biztos kisebb, mint ha csak öt nagy szám kell, és egyik egyest kettesre cserélem. Ebből következik, hogy az első hét szám összege legalább $4\cdot 1+3\cdot 2=10$. Ezt kivonva 26000-ból nézzük meg, mi a legnagyobb szám, ami még ötször választható. Ez az 5198. Ekkor azonban a 13. értéknek 0-nek kellene lennie, ami lehetetlen. A maximális módusz tehát az 5197, ami jó is. Pl.: 1;1;1;1;2;2;2;5;5197;5197;5197;5197;5197.

Középszintű érettségi feladatsorok

Összeállította: Szászné Simon Judit

2. feladatsor

I. rész

1. Legfeljebb hány síkot határoz meg a térben 10 pont?

2 pont		

2. Melyik szabályos sokszöget viszi önmagába a középpontja körüli 495°-os elforgatás?
   a. A négyzetet
   b. A szabályos háromszöget
   c. A szabályos ötszöget
   d. A szabályos nyolcszöget
   e. A szabályos tizenkétszöget

2 pont		

3. A következő halmazok közül melyeknek van meg az a tulajdonsága, hogy bármely kér elem szorzata is benne van a halmazban?
   a. Pozitív számok halmaza
   b. Prímszámok halmaza
   c. Páros számok halmaza

2 pont		

4. Leírtuk a számokat 1-től 6789-ig. Hány számjegyet írtunk le eközben?

3 pont		

5. Egy festőhenger átmérője 5,8 cm. A plafontól a padlóig egyszer végighúzva 14 teljes fordulatot tesz meg. Milyen magas falat festek?

3 pont		

6. Írjuk fel a P(-5; 2) és Q(1; -6) pontok Thalész körének egyenletét!

4 pont		

7. Hány különböző sorrendben írhatjuk le a „ L O G I K A” szó betűit?

2 pont		

8. Valaki egymás után kétszer fogadott a lóversenyen. Az első fogadást megnyerte, és így pénzét bizonyos százalékkal növelte. A következő fogadáskor az előbbi százaléknál 5%-kal kevesebbet veszített. Így ugyanannyi pénze maradt, mint az első fogadás előtt volt. Hány százalékos volt a nyeresége, illetve a vesztesége?

4 pont		

9. Mennyi a kétjegyű páratlan számok összege?

4 pont		

10. Milyen x-ekre teljesül, hogy $-x^2+5x+14>0$

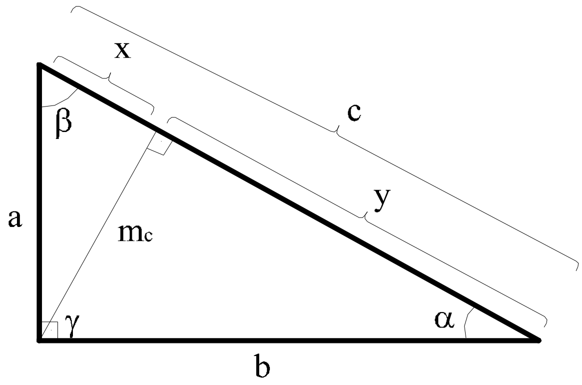
4 pont		

II. /A rész

11. Egy faluban a vasárnapi meccsre 1500 forintért árulják a jegyet. Ezért az árért csak 100-an vennének, de ahányszor 10 forinttal olcsóbban adják, annyiszor 3 fővel nő a jegyet váltók száma.
   a. Mennyi bevételt lehet maximum a jegyárakból elérni?
   b. Ábrázolja a függvényt koordinátarendszerben! 12 pont

12. Oldja meg a következő egyenleteket!
   a. $9^{x-1} + 3^{x+2} = 90$ 5 pont
   b. $3\sin^2 x - 4\cos^2 x = \sin x \cdot \cos x$ 7 pont

13. Határozzuk meg az ábrán látható derékszögű háromszög hiányzó adatait és területét, ha
   m_c =10,96 cm
   y=24,63 cm.

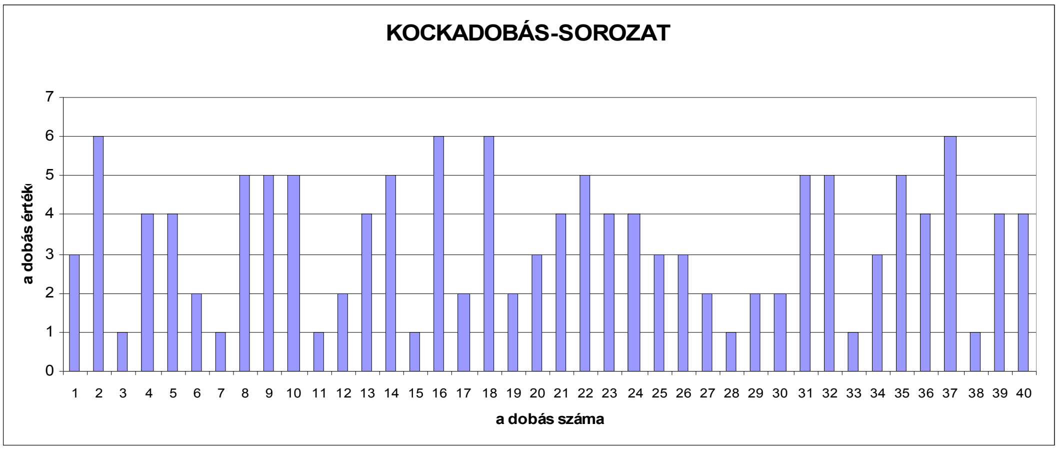


12 pont

II./B rész

A 14., 15. és 16., feladatok közül tetszés szerint választott kettőt kell megoldania.

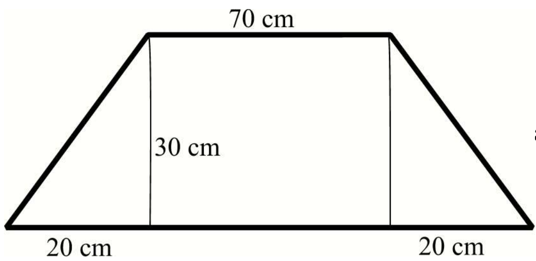
14.



a)Mi az ötös dobásának gyakorisága?
b)Mi az egyes dobásának relatív gyakorisága?
c)Mi a dobássorozat módusza?
d)Mi a dobássorozat átlaga?
e)Mennyi a medián?

17 pont

15. Két asztalos, Anti és Bálint íróasztal lapokat készít a kollégium tanulói számára. Az íróasztal méreteit az ábra mutatja.



az

a. Hány m^2 fa szükséges 60 asztal elkészítéséhez?

b. A munkát eredetileg 10 napra tervezték, de Anti első 4 nap beteg volt, ezért Bálint végig 120%-ot teljesített. Hány nap alatt lettek kész a munkával, ha eredetileg mindketten egyforma gyorsan dolgoztak, és felépülése után sem tudta Anti a teljesítményét növelni?

c. A munkáért összesen 1 500 000 forintot kaptak. Ennek 40%-a az anyagköltség, a többit a teljesítmény arányában osztották el. Mennyit kapott Anti, és mennyit Bálint?

17 pont

16. Tudjuk, hogy januárban pontosan négy hétfő és péntek volt.
a, Milyen napra esett január harmadika?
b, Hogyan változhat a válasz, ha január helyett áprilisról tudjuk ezt?

17 pont

Szászné Simon Judit 2. feladatsorának megoldása és pontozási útmutatója

I. rész

1. Egy síkot 3 pont határoz meg, ezért az összes lehetőségek száma maximum $\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 120$.

2. A nyolcszöget, mert annak középponti szöge 45°, és 495°=45°·11

3. Az első és a harmadik.

4. Figyelembe véve, hogy az egyjegyű számok leírásához 1; a kétjegyűekéhez 2; a háromjegyűekéhez 3, a négyjegyűekéhez 4 számjegy kell, a leírt számjegyek száma:
   9*1+90*2+900*3+5790*4=9+180+2700+23160=26049 .

5. $h = 14 \cdot 2\pi \cdot \frac{5,8}{2} \approx 255,1\,\mathrm{cm} = 2,55\,\mathrm{m}$

6. A kör középpontja PQ felezőpontja F (-2; -2). A kör átmérője a PQ szakasz hossza, azaz PQ= $\sqrt{\left(1-(-5)\right)^2 + (-6-2)^2} = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$, ezért a kör egyenlete: $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 25$.

7. Az első helyre 6 féle betűt tehetünk, a másodikra 5 félét,… a különböző sorrendek száma 6!=720.

8. A nyeresége 25% volt, a vesztesége pedig 20% volt.

9. 45 kétjegyű páratlan szám van, legkisebb a 11, legnagyobb a 99. Alkalmazva a számtani sorozat összegképletét
$$45 \cdot \frac{11+99}{2} = 2475 \cdot$$

10. $-x^2 + 5x + 14 = -(x-7)(x+2) > 0$. Vázolva a függvényt leolvasható, hogy $-2 < x < 7$.

II./A rész

11. $B = (1500 - 10x)(100 + 3x)$, ahol B a bevétel. Ez egy másodfokú függvény amelynek maximuma a két zérushely felezőpontjában van, tehát $x_{\max} = \frac{350}{6} = \frac{175}{3} \approx 58,33$. Ez azonban a feladat szempontjából értelmetlen, mert x egész, tehát nézzük meg x = 58-ra és x = 59-re adódó bevételt. B(58) = 252 080 Ft B(59) = 252 070 Ft ezért $1500 - 580 = 920$ forintos belépő mellett lesz maximális a bevétel.

12.

a. $\frac{1}{9} 9^x + 9 \cdot 3^x - 90 = 0$. Ez 3^x-edikenre másodfokú egyenlet, melynek gyökei
3^x =9 és 3^x = - 90. Az előbbi egyenlet gyöke x=2, ami kielégíti az egyenletet, az utóbbinak nincs gyöke, mert pozitív szám minden hatványa pozitív.

b. Egy lehetséges megoldás pl.:
$3\sin^2 x - 4\cos^2 x = \sin x \cdot \cos x$.
Mivel cos x=0 nem gyöke az egyenletnek, leoszthatunk vele.
$3tg^2 x - tg\, x - 4 = 0$, ahonnan tg x= -1 vagy tg x=$\frac{4}{3}$. Innen x-re az adódik, hogy $x_1 = 135° + k \cdot 180°$
vagy $x_2 = 53°7' + k \cdot 180°$ $k \in Z$.
Ezek a szögek valóban kielégítik a feladatot.

13. A számításhoz a magasságtételt, a Pitagorasz tételt és a tangens szögfüggvényt használtuk fel. (A hosszúságokat cm-ben, a területet cm^2 –ben adtuk meg.)

$a = 12cm$ $b = 26,95$ $c=29,51$

$\alpha = 24°$ $\beta = 66°$ $x=4,88$ cm $t = 161,7\ cm^2$

II./B rész

14.

	1	2	3	4	5	6
Gyakoriság	7	7	5	9	8	4
Rel. gyak.	0,175	0,175	0,125	0,225	0,2	0,1

c.) Módusz = 4
d.)Az átlag=3,4
e.) A medián is 4.

15.

a, Egy trapéz területe az ismert képlet alapján 2700 cm^2, 60 asztallaphoz162000 cm^2 $=16,2m^2$ bútorlap szükséges.

b, Jelölje x a Bálint által ledolgozott napok számát!

$(x – 2) + 1,2x = 20$ ahonnan $x =10$. Tehát most is 10 napig tartott a munka.

c, Az anyagköltség $1500\ 000 \cdot 0,4 = 600\ 000$ Ft volt. A maradék 900 000 Ft-on 2:3 arányban osztoztak, mert Anti 8 napi teljesítményért, Bálint $1,2 \cdot 10=12$ napi teljesítményért kapott pénzt. Tehát Anti 360 000 forintot, Bálint 540 000 forintot kapott.

16. Mivel a január 31 napos, tehát van három olyan egymást követő nap, amiből öt van a hónapban. Hétfő és péntek között 3, péntek és hétfő között csak 2 nap van, ezért keddből, szerdából és csütörtökből volt 5 db. Januárban. Így január 1 kedd volt, január 3 pedig csütörtök.

Mivel április csak 30 napos, ezért csak két egymás utáni nap volt ötször . Ez többféleképpen is lehetséges:
5 kedd és 5 szerda volt, akkor április 3 csütörtökre esett.
5 szerda és 5 csütörtök volt, akkor április 3 péntekre esett.
5 szombat és 5 vasárnap volt, akkor április 3 hétfőre esett.
Több eset nincs.

Középszintű érettségi feladatsorok

Összeállította: Táborné Vincze Márta

1. feladatsor

I. rész

1. Adott két halmaz
   A = {húsznál kisebb pozitív hárommal osztható számok halmaza}
   B = {1, 4, 9, 16}
   Sorolja fel az $A \cap B$ és az $A \setminus B$ elemeit! 2 pont

2. Lehetséges-e olyan 5 személyből álló társaság, ahol az embereknek rendre 4, 4, 2, 2, 1 ismerősük van?
   Ha igen, mondjon példát, ha nem, indokolja meg! 2 pont

3. Egy matematikaversenyen két feladatot tűztek ki. Az első feladatot az indulók 80%-a, a másodikat pedig az indulók 40%-a oldotta meg. Minden résztvevő megoldott legalább egy feladatot, mindkét feladatot 2 tanuló oldotta meg.
   Hányan indulhattak a versenyen ? 2 pont

4. Számológép használata nélkül állapítsa meg, mivel egyenlő
   a) $\log_2 \sqrt{2}$ 2 pont
   b) $(4 \cdot 2)^6 \cdot 2^{-16}$ 2 pont

5. Milyen valós x-ekre értelmezhetjük a következő kifejezéseket?
   a) $\frac{1}{x+1}$ 2 pont
   b) $\lg(1+x)$ 2 pont
   c) $\sqrt{1+x}$ 2 pont

6. Egy érmével háromszor dobunk. Mi a valószínűbb, hogy 1, vagy az, hogy 2 fejet dobunk?
   2 pont

7. Hány olyan pont van az 5 cm élű kocka belsejében, amelynek a kocka lapjaitól mért távolsága egész?
   helyes válasz 1 pont
   indoklás 2 pont

8. Hányadrésze az ABC háromszög területének a háromszög oldalfelező pontjai által meghatározott háromszög területe?
   helyes válasz 1 pont
   indoklás 2 pont

9. Adott az $A(1; 1)$ és $B(5; 4)$ pont.
   Határozza meg az AB szakasz hosszát! 2 pont

10. Az $f(x) = x(2-x)$ függvény a valós számok halmazán van értelmezve.
    Adja meg az $f(x) \le 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát! 4 pont

II./A rész

11. Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

a.) $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$ 6 pont

b.) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{2-x} = \sqrt{\frac{1}{2-x}}$ 6 pont

12. Hét csapat körmérkőzéses bajnokságon vesz részt. Mindenki mindenkivel pontosan egyszer fog játszani.
    a)Hány mérkőzés lesz összesen? 3 pont
    b)Lehetséges-e, hogy a bajnokság egy bizonyos pillanatáig minden csapat pontosan három mérkőzést játszott le? 4 pont
    c)Bizonyítsa be, hogyha 11 mérkőzést már lejátszottak, akkor van olyan csapat, amelyik már legalább négy mérkőzést lejátszott? 5 pont

13. Egy 500 m magas hegy csúcsáról két tengeri kikötő távolsága 72˚ alatt látszik. A két kikötő depressziószöge: 6˚ és 8˚.
    Milyen messze van a két kikötő egymástól? 12 pont

II./B rész

A 14., 15. és 16., feladatok közül tetszés szerint választott kettőt kell megoldania.

14. Péter lakásingatlant vásárolt. A földhivatalba történő bejegyzéskor értéktől függetlenül 2000 Ft, valamint 4 millió forint vételárig annak 2%-a, és az e feletti rész 6%-a a fizetendő illeték. Ha el is adtunk ingatlant, akkor az árkülönbözetre vonatkozik ez a szabály; ha kevesebbért veszünk, mint eladunk, akkor nincs illeték.

    a)Mekkora illetéket kell fizetnie Péternek 14, 5 millió forintos ingatlan vásárlásakor? 4 pont

    b)Mekkora illetéket kell fizetnie, ha közben elad egy 8 millió forintos ingatlant? 5 pont

    c)Adja meg képlettel, és ábrázolja a fizetendő illetéket a vételár függvényében a [0; 20 000 000] forintos intervallumban, ha 8 millióért adja el, és *x* Ft-ért vásárol? 2 pont + 6 pont

15. a) Ábrázolja közös koordinátarendszerben az $x + 2y = 20$ egyenest, 2 pont
    és az $x^2 + y^2 = 4$ kört. 2 pont

    b) A körvonalnak mely pontja van az egyeneshez legközelebb, illetve az egyenestől legtávolabb?
    helyes válasz 2 pont
    indoklás 2 pont

    c) Határozza meg a körvonalnak az egyeneshez legközelebbi, illetve az egyenestől legtávolabbi pontját! 5 pont

    d) Mekkorák ezek a távolságok? 4 pont

16. *ABCD* téglalapban *AB* = *a* és *BC* = *b* $(a \geq b)$. Legyen $0 \leq x \leq b$, és legyen *P*, *Q*, *R*, *S* az *AB, BC, CD, DA* oldalak olyan pontja, melyre *AP* = *BQ* = *CR* = *DS* = *x*.
    a)Milyen speciális négyszög *PQRS*? 1 pont
    Indokolja állítását! 2 pont
    b)Adja meg *PQRS* területét *a, b* és *x* függvényében! 4 pont
    c)Milyen x-re minimális a *PQRS* négyszög területe,
    ha *a* = 4, *b* = 2; , vagy 5 pont
    ha *a* = 4, *b* = 1 5 pont

Táborné Vincze Márta 1. feladatsorának megoldása és pontozási útmutatója

I. rész

1. $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
   $B = \{1, 4, 9, 16\}$
   $A \cap B = \{9\}$ 1 pont
   $A \setminus B = \{3, 6, 12, 15, 18\}$ 1 pont

2. Nem, hiszen az ismertség kölcsönössége miatt az egyes emberek ismerősei számának összege páros. 2 pont

3. 80% + 40% = 120%
   Tehát 20% 2 tanuló, 10 tanuló indult a versenyen. 2 pont

4. a) $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$ 2 pont
   b) $(4 \cdot 2)^6 \cdot 2^{-16} = 2^{18} \cdot 2^{-16} = 2^2 = 4$ 2 pont

5. a) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$ 2 pont
   b) $x \in \mathbf{R}$ és $x > -1$ 2 pont
   c) $x \in \mathbf{R}$ és $x \geq -1$ 2 pont

6. Egyformán valószínű, hiszen az 1 fej 2 írásnak és a 2 fej 1 írásnak felel meg 2 pont

7. Ha a kockát berakjuk a térbeli koordinátarendszer első síknegyedébe, úgy, hogy egyik csúcsa az origó, és az élei illeszkednek az x, y, z tengelyekre.
   Ekkor a kocka belsejében levő rácspontok lesznek a megfelelő pontok 2 pont
   Ezért a pontok száma 16. 1 pont

8. Negyede. 1 pont
   Az oldalfelezőpontok által meghatározott középvonalak 4 egybevágó háromszögre bontják az eredeti háromszöget. 2 pont

9. $\overrightarrow{AB}$ (4; 3) 1 pont
   $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{16+9} = 5$ 1 pont

10. $f(x) = x(2-x)$ $f(x) \leq 0$ ha $x \leq 0$ vagy $x \geq 2$ 4 pont

II./A rész

11. a) $6^x(1+6) = 2^x(1+2+4)$ 2 pont
    $6^x = 2^x$ $2^x \neq 0$ 2 pont
    $3^x = 1$ az exp. fv. szig. mon. $x = 0$ 1 pont
    Az átalakítások ekvivalensek, ezért $x = 0$ megoldása az eredeti egyenletnek. 1 pont

    b) Értelmezési tartomány: $0 \leq x < 2$

$$\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{x})^2}{(2-x)^2} = \frac{1}{2-x}$$

$$(\sqrt{2}-\sqrt{x})^2 = 2-x$$

$$2 + x - 2\sqrt{2x} = 2 - x$$

$2x - 2\sqrt{2x} = 0$ 2 pont

$2\sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{2}) = 0$

$x = 0 \quad x = 2$ 2 pont

Az eredeti egyenletnek csak az $x = 2$ gyöke. 2 pont

12. a) Összesen $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ mérkőzés volt. 3 pont

b) Nem lehetséges, hiszen ekkor $\frac{3 \cdot 7}{2}$ nem lenne egész szám. 4 pont

c) Ha nem lenne ilyen csapat, akkor mindegyikük legfeljebb 3 mérkőzést játszhatott volna, azaz a lejátszott mérkőzések száma kisebb lenn, mint $\frac{7 \cdot 3}{2} = 10{,}5$ 5 pont

13. A két kikötő legyen A és B, a hegy csúcsa C, talppontja D.

$CD = 500$ m

$CAD \sphericalangle = 6°$ $\quad CBD \sphericalangle = 8°$ 2 pont

$CDA \sphericalangle = 90°$ $\quad CDB \sphericalangle = 90°$

$CA = \frac{CD}{\sin 6°} = 4783{,}39 \approx CA \approx 4783$ m 3 pont

$CB = \frac{CD}{\sin 8°} = 3592{,}65 \approx CB \approx 3593$ m 3 pont

ACB háromszögben a cosinustétel segítségével AB meghatározható. $AB \approx 5017$ m 4 pont

II./B rész

14. a) 14,5 millió Ft esetében:

4 millió Ft után $4 \cdot 0{,}02$ millió Ft fizetendő

10,5 millió Ft után $10{,}5 \cdot 0{,}06$ millió Ft fizetendő

Tehát összesen 80 000 Ft + 630 000 Ft + 2 000 Ft = 712 000 Ft. 4 pont

b) Az árkülönbözet 6,5 millió Ft.

4 millió Ft után 80 000 Ft fizetendő.

2,5 millió Ft után 150 000 Ft fizetendő.

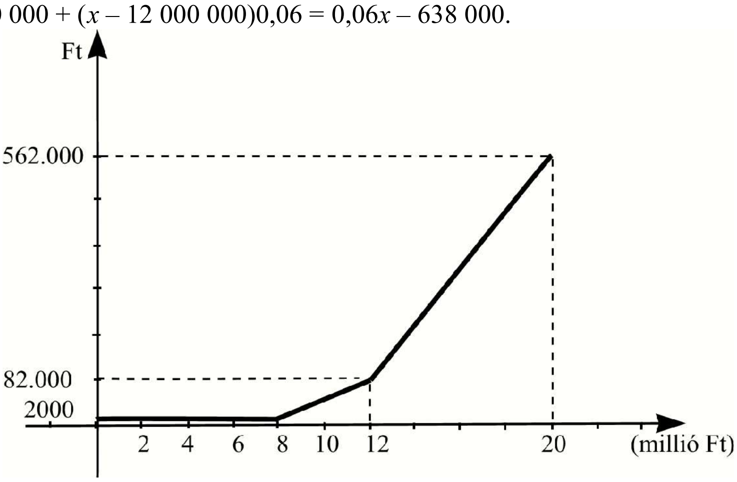
Összesen 80 000 Ft + 150 000 Ft + 2 000 Ft = 232 000 Ft. 5 pont

c) 8 milliótól 12 millióig fizetendő:

$2\,000 + (x - 8\,000\,000)\,0{,}02 = 0{,}02x - 158\,000$ 3 pont

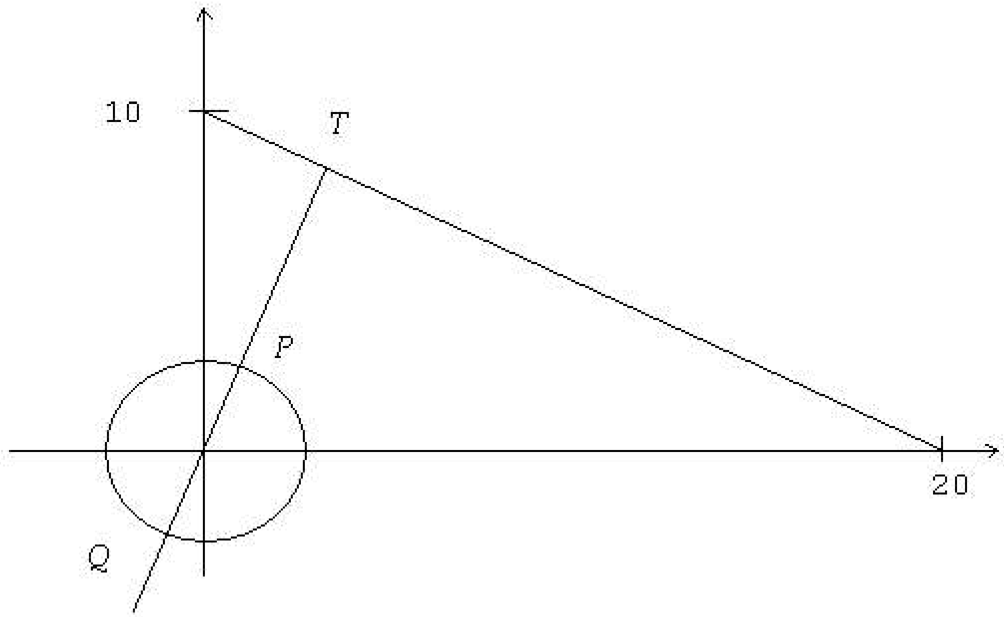
12 milliótól 20 millióig:

$2\,000 + 80\,000 + (x - 12\,000\,000)0{,}06 = 0{,}06x - 638\,000.$ 3 pont



A helyes ábráért 2 pont

15. a)



A helyes ábráért 2 pont

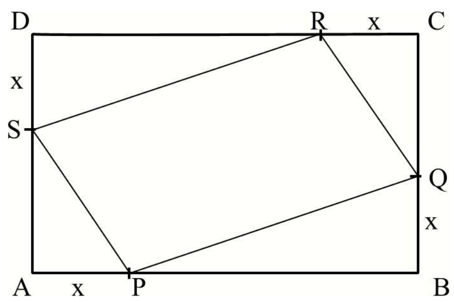
b) Legyen f egyenes merőleges az adott egyenesre, és menjen át a kör középpontján. Ennek egyenlete $-2x + y = 0$. f metszi a kört P-ben és Q-ban, az egyenest T-ben.
P lesz a körvonal az adott egyeneshez legközelebbi pontja, Q lesz a legtávolabbi pont.
4 pont

c) $\{x^2 + y^2 = 4; y = 2x\}$ egyenletrendszer megoldásai a P és Q pontok koordinátái.

$P\left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right), Q\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}; \frac{-4}{\sqrt{5}}\right)$ 5 pont

d) A legkisebb távolság $PT = 4\sqrt{5} - 2$, a legnagyobb távolság $PQ = 4\sqrt{5} + 2$.
4 pont

16. AP = BQ = CR = DS = x



a) $PQ = RS = \sqrt{(a-x)^2 + x^2}$

$QR = SP = \sqrt{x^2 + (b-x)^2}$

A szemközti oldalak egyenlőek, tehát a $PQRS$ négyszög paralelogramma. 3 pont

b) $T_{PQRS} = ab - x(a-x) - x(b-x)$ 4 pont

c) T_{PQRS} minimális $\Leftrightarrow (a+b)x - 2x^2$ maximális. 5 pont

Ez egy felfelé nyitott parabola, gyökei $x = 0$ és $x = \frac{a+b}{2}$

Maximum helye: $x = \frac{a+b}{4}$,

ha $0 \le x \le b$ ezért $\dfrac{a+b}{4} \le b$ azaz $a \le 3b$.

Tehát az a) esetben a maximumhely: $x = \dfrac{6}{4}$

ekkor a minimális terület: $T = \dfrac{6ab - a^2 - b^2}{8} = \dfrac{7}{2}$.

Ha $a > 3b$ (azaz a b) esetben), a maximum hely nem lesz a vizsgált intervallumban, itt a függvény szig mon nő, ezért a legnagyobb értékét $x = b$-ben veszi fel, ekkor a minimális terület $T = b^2 = 1$.

5 pont

Középszintű érettségi feladatsorok

Összeállította: Táborné Vincze Márta

2. feladatsor

I. rész

1. Adott két intervallum: $[-2;4]$ és $]3;5[$.

a)Ábrázolja számegyenesen a két intervallum unióját. 2 pont
b)Ábrázolja számegyenesen a két intervallum metszetét. 2 pont

2. Egy 16 000 Ft-os kerékpárt árleszállításkor 15%-kal olcsóbban adnak. Mennyiért?
2 pont

3. Az alábbi állítások között 2 igaz állítás van. Melyek ezek? 1 pont
a)Minden egész szám racionális.
b)Van olyan egész szám, amelyik nem racionális.
c)Minden racionális szám egész.
d)Van olyan racionális szám, amelyik nem egész.
Válaszát indokolja ! 2 pont

4. Egy úszóverseny döntőjében 8 induló van. Hányféle lehet az érmesek (az első három helyre beérkező) sorrendje? 2 pont

5. Számológép használata nélkül állapítsa meg, mivel egyenlő
a) $(\sqrt{7}+1)^2+(\sqrt{7}-1)^2$ 2 pont
b) $(2\sqrt{3}-5)\cdot(2\sqrt{3}+5)$ 2 pont

6. Határozza meg x értékét a következő egyenlőtlenségből!
$\lg x = 3\lg 2 - \frac{1}{2}\lg 16$ 1 pont

7. Milyen távol van a 4 cm sugarú kör középpontjától egy 5 cm hosszú húr? 3 pont
Készítsen ábrát!

8. Egy kocka egyik csúcsából kiinduló élvektorok **a**, **b**, **c**. Állítsuk elő ezek segítségével
a)a szemközti csúcsba mutató vektort, 2 pont
b)a kocka középpontjába mutató vektort! 2 pont

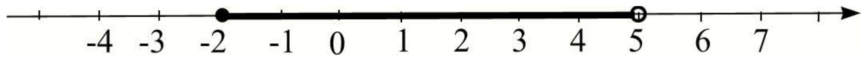
9. Egy osztály matematikadolgozatainak eredményei:
4, 5, 2, 1, 2, 1, 4, 3, 4, 1, 4, 1, 3, 1, 3, 5, 4, 5, 3.
Mennyi az osztályzatok átlaga, módusza, mediánja? 3 pont

10. Ábrázolja a valós számok halmazán értelmezett $f(x)=|x|+3$ függvényt a [-1, 3] intervallumon.
2 pont
Állapítsa meg a függvény értékkészletét az adott intervallumban! 2 pont

A II./A és II.B részek azonosak Táborné Vincze Márta 1. feladatsorának II. részével

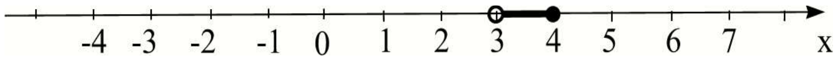
Táborné Vincze Márta 2. feladatsorának megoldása és pontozási útmutatója

1. a) Únió:



2 pon

b) Metszet:



2 pont

2. 16 000 Ft-nak 15%-a 2400. 2 pont
Tehát (16 000 – 2400) 13 600 Ft volt a kerékpár. 2 pont

3. Az *a* és *d* állítások igazak. 3 pont

4. $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ lehet az érmesek sorrendje. 2 pont

5. a) $7 + 2\sqrt{7} + 1 + 7 - 2\sqrt{7} + 1 = 16$ 2 pont

b) $(2\sqrt{3} - 5)(2\sqrt{3} + 5) = 12 - 25 = -13$ 2 pont

6. $\lg x = 3\lg 2 - \frac{1}{2}\lg 16$, $x = \frac{8}{4} = 2$ 2 pont

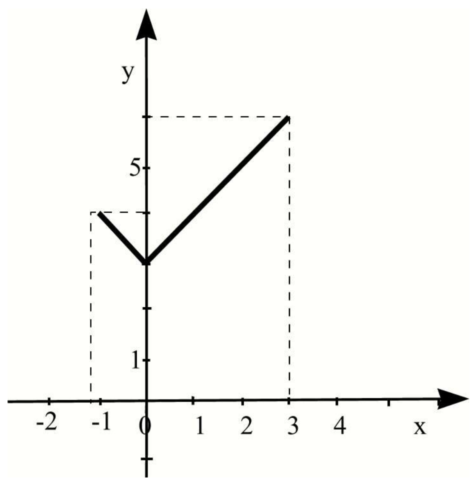
7. $h = \frac{5}{2}$ és $d = \sqrt{25 - \frac{25}{4}} = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ 3 pont

8. $\overrightarrow{AG} = \underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}} + \underline{\mathbf{c}}$ 2 pont

$\overrightarrow{AO} = \frac{\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}} + \underline{\mathbf{c}}}{2}$ 2 pont

9. Átlag: 2.91; 1 pont
módusz: 1.4; 1 pont
medián: 3. 1 pont

10.



Helyes ábra: 2 pont
Értékkészlete: [3; 6] 2 pont

A II./A és II.B részek azonosak Táborné Vincze Márta 1. feladatsorának II. részével