Bánszki Bea

Egy Csodálatos Elme – Blackout –

Békéscsabai Belvárosi Általános Iskola és Gimnázium
Felkészítő tanár: Méri Károly

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Matematika órán megnéztünk az **Egy Csodálatos Elme** című filmet, ami John Nash Nobel-díjas matematikus életét mutatja be Russel Crowe főszereplésével. Habár ez a fantasztikus film megérne egy külön dolgozatot, hiszen 4 Oscar-, és 4 Golden Globe-díjat nyert, én mégsem ezt szeretném bemutatni. A filmben Nash és az iskolatársai egy úgynevezett **Go** logikai játékot játszanak. A játék lényege, hogy két játékos felváltva tesz le fekete és fehér köveket egy négyzethálós tábla metszéspontjaira. A cél az, hogy az ellenféltől minél több életet elvéve a végén mi nyerjük meg a játszmát. Johnt is kihívták egy partira, és annak ellenére, hogy ezt mondja: *„rettegek, dermedek, lebénulok, lezsibbadok”*, elfogadta a kihívást. A végén kikapott a csoporttársától, és ezt mondta: „*Ezt nem értem. Én kezdtem a partit, hibátlanul játszottam. Rossz a játék.”* Vagyis az ő elképzelése szerint mindig a kezdő játékosnak kell nyernie, ha hiba nélkül játszik. A filmnek ebben a pillanatában egy közös tulajdonságot véltem felfedezni John Nash-ben és magamban. Mindketten csak olyan játékokkal szeretünk játszani, amikben biztosan nyerünk. De vajon igaz volt az állítása? Mindig a kezdő játékosnak kell nyernie?

Részlet a filmből [K1]

Go Game [K1]

A film honlapján találtunk egy másik, **Blackout** elnevezésű logikai játékot. Ennek az **egyszemélyes** játéknak a lényege, hogy egy 3x3-as táblán kétszínű korongokat fordítunk felfelé vagy lefelé. A cél az, hogy mind a 9 korong egyszínű legyen természetesen minél kevesebb lépésben. A matematikatanárommal azon gondolkodtunk, hogy vajon minden kezdő állásnak van megoldása? És mennyi az a minimum lépés, amelyből meg lehet oldani egy állást? Annak járunk utána, hogy van-e valami matematikai megoldása, nyerő stratégiája, mint például a Nim-játéknak. (*http://www.abeautifulmind.com/games/blackout/)*

Nim-játék

Mielőtt részletesen belemennék a Blackout bemutatásába, egy másik logikai **kétszemélyes** játékot szeretnék ismertetni, ez pedig a **Nim-játék**. „*A játék leírása: adott n db kupac, melyek rendre a_1, a_2, a_3..., a_n darab pálcikát tartalmaznak. Két játékos játszik, akik felváltva vesznek el akárhány, de legalább 1 pálcikát valamelyik tetszőleges kupacból. Az nyer, aki az utolsó pálcikát elveszi. Kérdés, hogy kinek van nyerő stratégiája.”*[1]

Ahhoz hogy megtudjuk ennek a játéknak a nyerő stratégiáját, fel kell írnunk az összes kupac pálcikának a számát kettes számrendszerben, majd ezeket a kettes számrendszerben felírt számokat összeadjuk a nim-összeadás segítségével.

„Definíció (nim-összeadás): Vegyük a nemnegatív egész számok halmazát, és azon úgy értelmezzük a nim-összeadást, hogy elemeit kettes számrendszerbeli alakjukban felírva adjuk össze modulo 2, azaz nem törődve az egyes helyi értékeken adódó maradékokkal."[1]

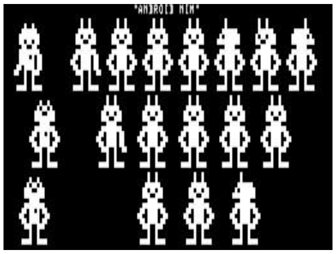
IIIIIII	7	111
IIIII	5	101
IIIIIIIIII	10	1010
IIIIIIIIIIIII	13	1101
		101

Akkor van nyerő lépésünk, ha valamelyik oszlopban páratlan számú 1-es van, vagyis $a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus \ldots \oplus a_n \neq 0$ és mi következünk. Azt, hogy nekünk a soron következő lépésben hány pálcikát kell elvennünk és melyik kupacból, így tudjuk kiszámolni: megkeressünk balról az első olyan oszlopot, amelyben páratlan számú 1-es van (ebben a játékban a 2. oszlop). Kiválasztunk ebben az oszlopban egy 1-est, és úgy változtatjuk meg, hogy minden oszlopban páros számú 1-es legyen, vagyis $a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus \ldots \oplus a_n = 0$.

II	2	10
IIIII	5	101
IIIIIIIIII	10	1010
IIIIIIIIIIIII	13	1101
		0000

Ha tovább folytatnánk ezt a partit, akkor mi kerülnénk ki győztesen, természetesen csak akkor, ha hibátlanul játsszunk.

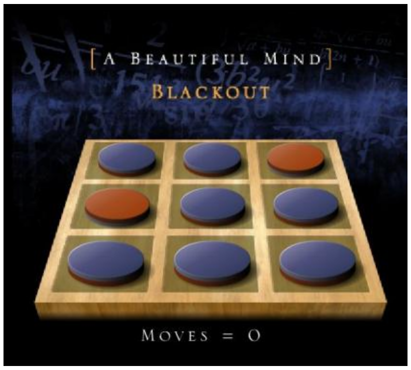
Érdekesség: 1984-ben a bevezetett HT1080z iskolai számítógépen már megtalálható volt ez a játék.



[K2]

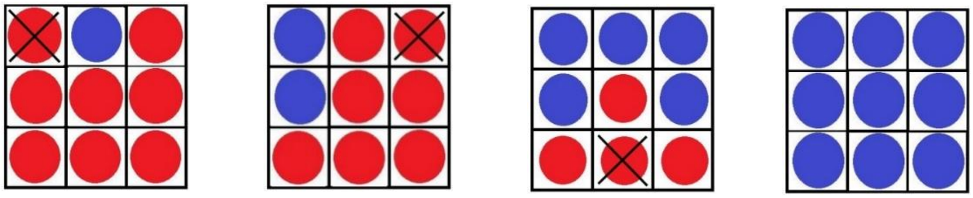
Blackout

Nem csak párban lehet logikai játékokat játszani, hanem egyedül is. A Blackout pedig egy nagyon jó kis gondolkodtató játék (kivéve akkor, ha már annyit játszottunk vele, hogy minden lépésnek kapásból tudjuk a megoldását). A következő oldalakon szeretném bemutatni, hogy minden kezdő állásnak van megoldása, illetve, hogy mi az a minimum lépés, amelyből meg lehet oldani egy-egy állást.



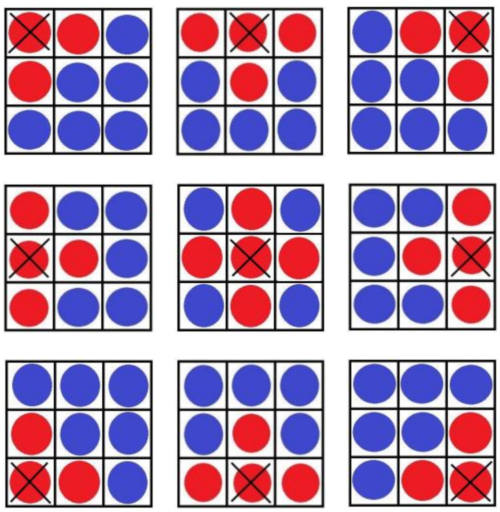
[K3]

A játék menete: a számítógép feldob egy tetszőleges állást piros és kék korongokkal. A korongokra kattintva mindig megváltozik az adott korong, illetve a közvetlen mellette lévő korongok színe. A cél az, hogy mind a kilenc korong vagy csak kék, vagy csak piros színű legyen.



Egy játék menetének a szemléltetése – a végén az összes korong kék színű lesz (a következő kattintás helyét mindig x-szel jelölöm)

Mivel 9 korong van, 9 mezőre tudok kattintani. Ezekkel a kattintásokkal egyszerre meg tudom változtatni 3, 4 vagy 5 korong színét attól függően, hogy hová klikkelek.



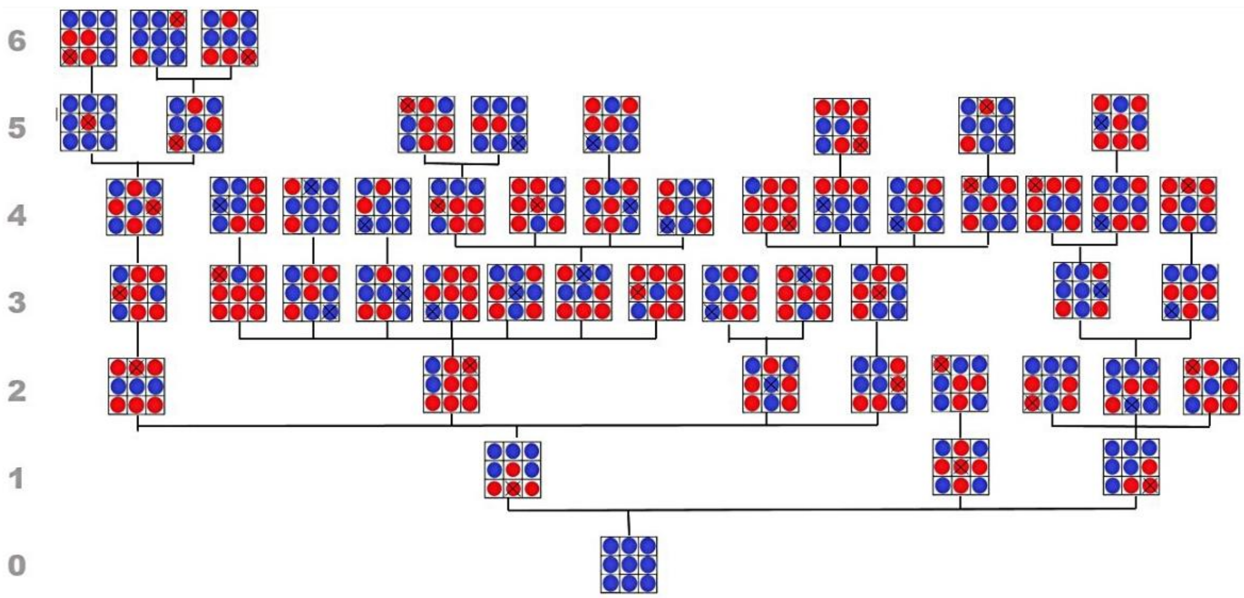
Lehetséges lépések – a kattintás helye x-szel jelölve

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

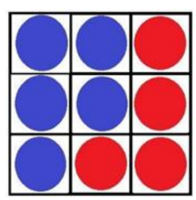
A lehetséges lépések felírása mátrixok segítségével

Kérdés: minden állásnak van megoldása?

Mielőtt bármiféle matematika megoldást kerestem volna, fogtam egy papírt és egy ceruzát és lerajzoltam az összes lehetséges állást. Több napomba telt, de végül sikerült mindet felrajzolnom a megoldásokkal együtt. A képen jól látszik, hogy az összes általam felírt állást meg lehet oldani maximum 6 lépéssel.



Természetesen, ez még nem a matematikai megoldása a kérdésnek. Ahhoz hogy bemutassam a játék mögött rejlő matematikát, egy tetszőleges állást választok (a mátrixban a 0 a kék, az 1 a piros korongokat helyettesíti):



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A felírt mátrixban is ugyanúgy történik a váltás: ha egy adott helyre kattintok, a 0-ból 1 lesz, az 1-ből 0, ugyanúgy, mint a kékből piros, a pirosból pedig kék. Felesleges sokszor egy helyre kattintanunk, mert ha párosszor kattintunk egy korongra, akkor nem fog megváltozni a színe. Ha páratlanszor klikkelünk, akkor is elég csak egyszer, mert ugyanúgy fog megváltozni a korong színe, mintha 5-ször kattintottunk volna rá. A játéknak ez a tulajdonsága hasonlít a Nim-játékban megismert modulo 2 összeadáshoz: akárhányszor lépek az egyes korongokra, csak két állapot létezik, a kék vagy a piros (0 vagy 1).

a	b	c
d	e	f
g	h	i

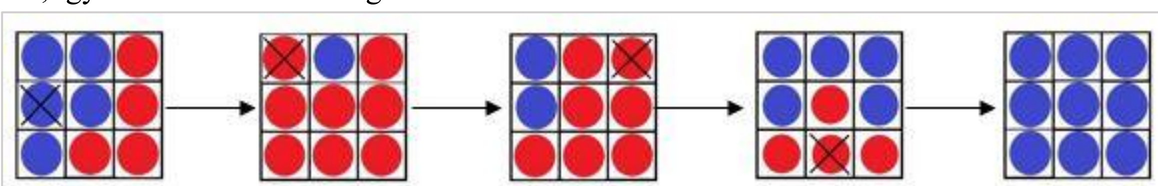
Hogy megtudjuk, hová kell kattintanunk, hogy az összes korong egy színű legyen (jelen esetben kék, vagyis a mátrixban mindenhol 0 legyen), egy 9 ismeretlenes egyenletet kell felírnunk. Az ismeretlenek az egyes korongok adják betűkkel jelölve *(az ismeretlenek: a; b; c; d;… h; i.).* A 9 egyenlet azt mutatja, hogy melyik korongra klikkelve tudom megváltoztatni az egyes mezők állapotát (tehát a bal felső mezőt az *a, b, vagy d* korongokra való kattintással tudom megváltoztatni). Ahol a kezdő állásban piros korong volt, egy 1-es szerepel az adott egyenletben Az egyenlet felírásához a *Derive 6* elnevezésű programot használtam.

$$\begin{cases} a + b + d = 0 \\ a + b + c + e = 0 \\ 1 + b + c + f = 0 \\ a + d + e + g = 0 \\ b + d + e + f + h = 0 \\ 1 + c + e + f + i = 0 \\ d + g + h = 0 \\ 1 + e + g + h + i = 0 \\ 1 + f + h + i = 0 \end{cases}$$

Az eredmény ez lett:

$$a = \frac{1}{7} \wedge b = -\frac{4}{7} \wedge c = \frac{1}{7} \wedge d = \frac{3}{7} \wedge e = \frac{2}{7} \wedge f = -\frac{4}{7} \wedge g = -\frac{6}{7} \wedge h = \frac{3}{7} \wedge i = -\frac{6}{7}$$

Amikor először megláttam az eredményt, eléggé elkerekedett a szemem, ezzel most mit kellene csináljak? Kicsit jobban megvizsgálva a számokat feltűnt, hogy a törtek nevezőjében mindenhol 7-es szerepel, tehát itt nincs eltérés. Viszont a számlálókban 1-től 6-ig különböző számok jöttek ki. A próbálkozásoknak köszönhetően rájöttem, hogy ahol a törtek számlálójában páratlan szám áll, oda kell klikkelnünk, vagyis az *a-ra, c-re, d-re* és a *h-ra*. Kombináció révén a sorrend nem számít, így a 4 kattintás tetszőleges sorrendű lehet.



A mátrixösszeadásban a *modulo 2* vagy *kizáró vagy* (XOR) logikai művelettel szemléltethető egy kattintás műveleti eredménye.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \veebar \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{MOD}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, 2\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Mátrixösszeadás és XOR szemléltetése

Mátrixműveletes több ismeretlenes egyenlettel is felírhatjuk a megoldandó problémát. Itt is megtalálható a 9 ismeretlenes egyenletrendszer: adott a kezdő állás, a kérdés pedig hogy melyik gombra hányszor kell ráklikkelni, hogy a végső állás mátrixában csak 0 szerepeljen?

$$a\cdot\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+b\cdot\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}+c\cdot\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}+d\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}+$$
$$e\cdot\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}+f\cdot\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}+g\cdot\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}+h\cdot\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}+$$
$$i\cdot\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Eredménynek pedig ugyanazt kaptam, mint az első egyenletrendszernél.

Eredmény:

$$a=\frac{1}{7}\wedge b=-\frac{4}{7}\wedge c=\frac{1}{7}\wedge d=\frac{3}{7}\wedge e=\frac{2}{7}\wedge f=-\frac{4}{7}\wedge g=-\frac{6}{7}\wedge h=\frac{3}{7}\wedge i=-\frac{6}{7}$$

Ellenőrzésképp felírhatjuk a kezdő állás, illetve a 4 mátrix összegét *modulo 2*-t vagy *Xor* (kizáró vagy) kifejezést használva.

$$\mathrm{MOD}\left(\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}, 2\right)$$

$$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\veebar\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\veebar\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\veebar\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\veebar\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$$

Eredménynek mindkét esetben ezt kapjuk:

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Vagyis jól dolgoztunk.

Mi van akkor, ha én a végén nem csupa kék, hanem csupa piros állást szeretnék kapni (vagyis a mátrixban csak 1-esek szerepeljenek)?

Ugyanúgy felírom a két egyenletrendszert, csak a végeredményeket változtatom meg.

$$\begin{cases} a+b+d=1 \\ a+b+c+e=1 \\ 1+b+c+f=1 \\ a+d+e+g=1 \\ b+d+e+f+h=1 \\ 1+c+e+f+i=1 \\ d+g+h=1 \\ 1+e+g+h+i=1 \\ 1+f+h+i=1 \end{cases}$$

$$a\cdot\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+b\cdot\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}+c\cdot\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}+d\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}+$$
$$e\cdot\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}+f\cdot\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}+g\cdot\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}+h\cdot\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}+$$
$$i\cdot\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

Eredmény:

$$a=\frac{4}{7}\wedge b=-\frac{2}{7}\wedge c=\frac{4}{7}\wedge d=\frac{5}{7}\wedge e=\frac{1}{7}\wedge f=-\frac{2}{7}\wedge g=-\frac{3}{7}\wedge h=\frac{5}{7}\wedge i=-\frac{3}{7}$$

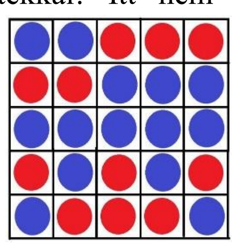
Vagyis ahhoz, hogy csupa piros végeredményt kapjunk, a *d, e, g, h* és *i* korongokra kell kattintanunk. Ellenőrzés:

$$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\veebar\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\veebar\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}\veebar\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}\veebar\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\veebar\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

Most a 3x3-as tábla egyik kezdőállásával megcsináltuk az egyenletrendszert, és kijött a megoldás, tehát megtaláltam a megoldáshoz vezető utat. Azonban ezzel még nem bizonyítottam, hogy minden lehetséges állásnak meg lehet adni a megoldását, és hogy ez a megoldás egyben a legrövidebb út. Azonban a 3x3-as játékban még nincs olyan sok állás, így viszonylag könnyű megtalálni a megfelelő lépéseket az egyenletrendszer felírása nélkül is.

Kérdés: az 5x5-ös tábla állásainak is van ilyen megoldása?

Már annyira belelendültem a játékba, hogy már nem elég a 3x3-as játék, új kihívásokat kell teljesítenem. Foglalkozzunk egy kicsit az 5x5-ös játékkal! Itt nem írom fel az összes alapkattintást, mert összesen 5x5=25 darab van, ami elég nagy terjedelmet foglal el, és nekem még nagyon sok a mondanivalóm. Vegyünk itt is egy kezdő állást:



$$\begin{bmatrix}0&0&1&1&1\\1&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&1&0&1\\0&1&1&1&0\end{bmatrix}$$

Itt az egyenletrendszerembe már nem 9, hanem 25 ismeretlen lesz, mivel 25 lehetséges kattintás van (*az ismeretlenek: a; b; c; d; e;… x; y.*). Itt is a *Derive 6* programot használom, azonban az egyenleteimbe nem fog látszódni a 25 mátrix. Minden mátrixot elneveztem betűvel és számmal attól függően, hogy hova kattintok: a betűk mindig a sorokat, a számok pedig az oszlopokat jelzik *(tehát ha én a jobb alsó sarokba klikkelek, az az e5 elnevezésű mátrixnak felel meg).*

a1	a2	a3	a4	a5
b1	b2	b3	b4	b5
c1	c2	c3	c4	c5
d1	d2	d3	d4	d5
e1	e2	e3	e4	e5

$$e5 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Példa: e5-ös mátrix

Azt szeretném kapni, hogy a végállapot csupa kék legyen, vagyis a mátrixban csak 0 szerepeljen.

$$\text{kezdés} + a\cdot a1 + b\cdot a2 + c\cdot a3 + d\cdot a4 + e\cdot a5 + f\cdot b1 + g\cdot b2 + h\cdot b3 + i\cdot b4 + j\cdot b5 + k\cdot c1 + l\cdot c2 + m\cdot c3 + n\cdot c4 + o\cdot c5 + p\cdot d1 + q\cdot d2 + r\cdot d3 + s\cdot d4 + t\cdot d5 + u\cdot e1 + v\cdot e2 + w\cdot e3 + x\cdot e4 + y\cdot e5 = \text{kék}$$

false

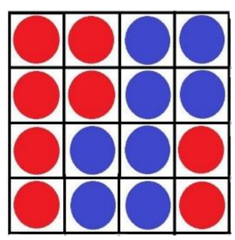
Legnagyobb meglepetésemre hibát írt ki, ezért megpróbáltam úgy is, hogy csupa piros legyen a végeredmény, azaz a mátrixban csak 1-esek szerepeljenek.

$$\text{kezdés} + a\cdot a1 + b\cdot a2 + c\cdot a3 + d\cdot a4 + e\cdot a5 + f\cdot b1 + g\cdot b2 + h\cdot b3 + i\cdot b4 + j\cdot b5 + k\cdot c1 + l\cdot c2 + m\cdot c3 + n\cdot c4 + o\cdot c5 + p\cdot d1 + q\cdot d2 + r\cdot d3 + s\cdot d4 + t\cdot d5 + u\cdot e1 + v\cdot e2 + w\cdot e3 + x\cdot e4 + y\cdot e5 = \text{piros}$$

false

Itt sem kaptam eredményt. Lehet, hogy nem minden állásnak van az 5x5-ös táblában megoldása?

Megpróbálkoztam egy 4x4-es táblával is, hátha ott sikerrel járok. A mátrixokat ugyanazzal a módszerrel neveztem el, mint az előbb *(az ismeretlenek: a; b; c; d;… o; p.)*. Kezdő állás:



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahogy lentebb látszik, se a csupa kék, se a csupa piros végállásra sem kaptam eredményt. Vajon miért?

$$\text{kezdő} + a\cdot a1 + b\cdot a2 + c\cdot a3 + d\cdot a4 + e\cdot b1 + f\cdot b2 + g\cdot b3 + h\cdot b4 + i\cdot c1 + j\cdot c2 + k\cdot c3 + l\cdot c4 + m\cdot d1 + n\cdot d2 + o\cdot d3 + p\cdot d4 = \text{kék}$$

false

$$\text{kezdő} + a\cdot a1 + b\cdot a2 + c\cdot a3 + d\cdot a4 + e\cdot b1 + f\cdot b2 + g\cdot b3 + h\cdot b4 + i\cdot c1 + j\cdot c2 + k\cdot c3 + l\cdot c4 + m\cdot d1 + n\cdot d2 + o\cdot d3 + p\cdot d4 = \text{piros}$$

false

Mi lehet az oka, hogy nem kaptam megoldást? Ahhoz, hogy választ kapjak a kérdésemre, elkezdtem összehasonlítani a 3x3-as játékot a 4x4-es és az 5x5-ös játékokkal. Ehhez először felírtam az egyenletrendszer mátrixait egy nagy mátrixban. Vagyis az alapjátékból egy 9x9-es, a 4x4-es játékból egy 16x16-os, az 5x5-ös játékból egy 25x25-ös mátrixot kaptam. Ennek a három mátrixnak vizsgáltam a tulajdonságait.

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

9x9-es mátrix

A dolgozatom megírása előtt *Csákrány Béla Diszkrét matematikai játékok* c. könyvét is kezembe vettem. Ebben található egy Lámpaoltás nevű játék, ami gyakorlatilag ugyanaz, mint a Blackout. Ebben az írásban bukkantam rá a **Cramer-szabály**ra: *ha az egyenletrendszer determinánsa nem 0, az egyenletrendszernek mindig van egy megoldása.* [2] **Ekkor ez a megoldás egyértelmű, és nincs több.**

Innentől kezdve nem volt más dolgom, mint megnézzem a 9x9-es, 16x16-os és a 25x25-ös mátrixok determinánsát. A mátrixokat az egyszerűség kedvéért itt is elneveztem: a 9x9-es az *A*, a 16x16-os a *B*, a 25x25-ös a *C* jelzést kapta.

$DET(A) = -7$

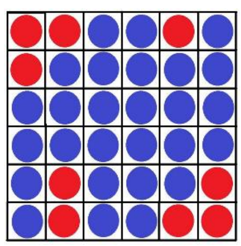
$DET(B) = 0$

$DET(C) = 0$

$DET(D) = 2197$

Mivel a 3x3-as mátrixának nem 0 a determinánsa, ezért minden esetben van megoldása és egyértelmű a megoldása. Ahogy az ábrán látszik is *B*-nek és *C*-nek is 0 lett a determinánsa, ami azt jelenti, hogy az egyenletrendszerek egyenletei nem függetlenek egymástól. Kíváncsiságból megnéztem a 6x6-os játék determinánsát is. Ehhez először felírtam a 36x36-os nagy mátrixot *(D* jelzés), és megnéztem a determinánsát.

Az eredmény nem 0 lett. Vagyis a 6x6-os játéknak meg lehet adni a megoldását? Hogy ellenőrizzem magam, kipróbálok egy 6x6-os játékot. Választottam egy kezdő állást, felírtam a 36 lehetséges lépést *(jelölésük: A1; A2; … A6; B1; B2;… F5; F6.)*. Mivel már olyan sok ismeretlenem van, hogy nincs elegendő betű az ábécében, az ismeretleneket az *i1; i2; i3;… i6; j1; j2;… n5; n6*. jelzések adják. A 36 ismeretlenes egyenletrendszer:



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\text{kezdő} + i1 \cdot A1 + i2 \cdot A2 + i3 \cdot A3 + i4 \cdot A4 + i5 \cdot A5 + i6 \cdot A6 + j1 \cdot B1 + j2 \cdot B2 + j3 \cdot B3 + \\ &j4 \cdot B4 + j5 \cdot B5 + j6 \cdot B6 + k1 \cdot C1 + k2 \cdot C2 + k3 \cdot C3 + k4 \cdot C4 + k5 \cdot C5 + k6 \cdot C6 + l1 \cdot D1 \\ &+ l2 \cdot D2 + l3 \cdot D3 + l4 \cdot D4 + l5 \cdot D5 + l6 \cdot D6 + m1 \cdot E1 + m2 \cdot E2 + m3 \cdot E3 + m4 \cdot E4 + \\ &m5 \cdot E5 + m6 \cdot E6 + n1 \cdot F1 + n2 \cdot F2 + n3 \cdot F3 + n4 \cdot F4 + n5 \cdot F5 + n6 \cdot F6 = \text{kék} \end{aligned}$$

Eredményül azt kaptam, hogy a csupa kék álláshoz az *A1; A2; A5; B2; B6; C6; D2; D5; E1; E2; E3; E4; E5; F2; F3; F4; és F5* mátrixokat kell használnom (a nagy terjedelemre való tekintettel nem írom fel a teljes megoldást). Ellenőrzés:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \veebar \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \veebar \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \veebar \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \veebar \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \veebar \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\veebar C6 \veebar D2 \veebar D5 \veebar E1 \veebar E2 \veebar E3 \veebar E4 \veebar E5 \veebar F2 \veebar F3 \veebar F4 \veebar F5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vagyis a 6x6-os játéknak tényleg ki tudjuk számítani ugyanúgy a megoldását, mint a 3x3-as alapjátéknak.

Összegzés

Összegezve az eddig leírtakat büszkén kijelenthetem, hogy a fő kérdést, miszerint van-e mindig megoldása a 3x3-as Blackout kezdő állásainak, sikeresen bebizonyítottam és megválaszoltam: igen, bármilyen kezdő állást dob fel a számítógép, mindig meg lehet oldani maximum 6 lépéssel. Sőt, arra is rájöttem, hogy a 4x4-es és 5x5-ös játékoknak nem minden esetben van megoldása, mert az egyenletrendszer egyenletei nem függetlenek egymástól, így nincs annyi független egyenlet, mint amennyi ismeretlen a rendszerben. Azonban a 6x6-os játék egyenletei már függetlenek egymástól, vagyis 36 ismeretlenem és 36 egyenletem van, így minden esetre mindig van megoldásom.

A fent leírtakból következik, hogy ha 4x4-es vagy 5x5-ös játékkal játszom, a számítógép nem dobhat egy véletlenszerű kezdést, hiszen nem biztos, hogy van megoldása a játéknak. Ekkor a számítógépnek gondolkodnia kell: a két nyerő (csupa piros, vagy kék) állásból indul el visszafelé, és így adhat egy kezdő állást, aminek biztos, hogy van megoldása.

Mielőtt nekikezdtem a dolgozatom megírásához, főleg interneten kutakodtam. Így találtam rá többek között koreai matematikusok, *Sang-Gu Lee, Jong Bin Park* és *Jeong-Mo Yang* írásaira. Számos tanulmány íródott ebben a témában az ő kezük alatt. Az írások váza hasonló, vagy egy az egyben ugyanaz, de mindegyik tartalmaz egy kis kiegészítést, plusz információt, amit fel tudtam használni a munkám során. Az egyik munkájukban egészen a 19x19-es játékig vizsgálták, hogy meg lehet-e oldani minden kezdő állást vagy sem: a 9x9-es, 11x11-es, 14x14-es, 17x17-es és 19x19-es játék egyenletrendszerének az egyenletei sem függetlenek egymástól, így ezeknek az esetében sem dobhat fel a számítógép egy véletlenszerű állást. [3] Egy másik írásban nem szimmetrikus táblánál próbálják megoldani ugyanezt a problémát [7] Ebből is látszik, hogy a téma kifejtése még nem teljes, és további érdekes problémákkal lehetne még foglalkozni a Blackout kapcsán. Én személy szerint nagyon boldog vagyok, hogy sikerült megtalálnom a játék megoldást meghatározó matematikát, és a dolgozat megírása közben sok hasznos információval gazdagodtam, és az eredmény megtalálása nagy örömet jelentett számomra.

Felhasznált irodalom

[1] Nyitrai Orsolya Katalin: Matematikai játékok (13. o.) *(https://web.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_mattan/2014/nyitrai_orsolya_katalin.pdf)*

[2] Csákrány Béla: Diszkrét Matematikai játékok (Polygon Kiadó - SZTE Bolyai Intézet Szeged, 2005) (49-53.o., 162-166.o.)

[3] Sang-Gu LEE, Jon-Lark KIM, In-Jae KIM, Namyong LEE, Ajit KUMAR, Phong VU, Victoria LANG, Jae Hwa LEE: Linear Algebra (202-210. o.) *(http://www.bigbook.or.kr/bbs/data/file/bo16/2950088668_5i3loGZ8_BAF2BACF_BCB1C7FCB4EBBCF6C7D0_B3BBC1F628BFB5B9AE_C0CEBCE2BFEB29_C3D6C1BE.pdf)*

[4] Sang-Gu Lee, Jeong-Mo Yang: LINEAR ALGEBRAIC APPROACH ON REAL σ-GAME (*http://matrix.skku.ac.kr/2006-talk/2006-7-ICTM3/realsigmagame.pdf)*

[5] Sang-Gu Lee: Activity of a gifted student who found linear algebraic solution of Blackout puzzle (*http://matrix.skku.ac.kr/sglee/album/2004-ICME10SPF/ICME-10-July04.htm)*

[6] Sang-Gu Lee, Duk-Sun Kim: BlackOut Game and Its Modeling – Mathematical Models in the Game *(http://matrix.skku.ac.kr/2009/2009-MathModeling/lectures/week12.pdf)*

Képek:

[K1] – részletek az Egy Csodálatos Elme c. filmből (forrás: Google)

[K2] – forrás: *http://ht.homeserver.hu/html/programbasic.html*

[K3] – forrás: *http://www.abeautifulmind.com/games/blackout/*

A dolgozatban található összes többi kép és ábra saját készítésű.