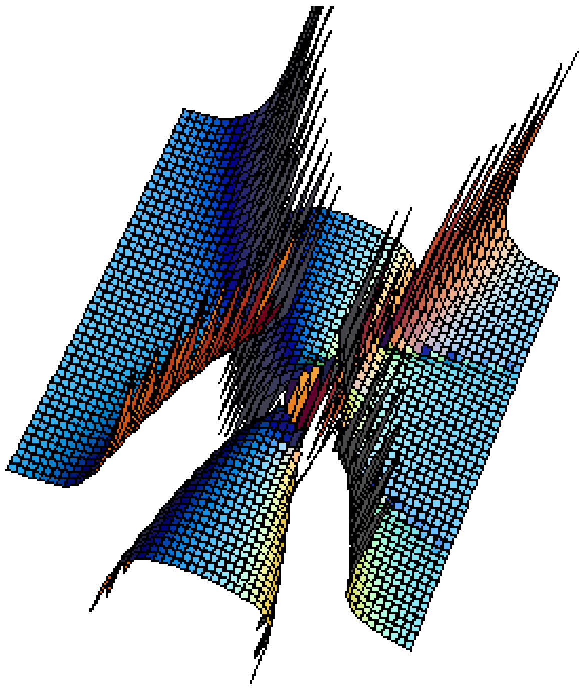
Belvárosi Általános Iskola és Gimnázium

Békéscsaba

Kétváltozós függvények szélsőértéke és érintője



Készítette: Gulyás Berta

Témavezető: Méri Károly

2016.

TARTALOM

1. Bevezetés

Függvényekkel, ha máskor nem, iskolai tanulmányai során mindegyikünk találkozik, de sokszor nem is gondolunk bele, mennyi függvénnyel találkozunk nap, mint nap. Ezek egy része egyváltozós, ám nem ritkák a két- vagy többváltozós variációk sem. Elsőre ez ijesztőnek hathat, de ezek teljesen hétköznapi dolgok, pl. a munkabér = ledolgozott órák száma · órabér „kétváltozós függvény" mindenki életében előfordul.

Ezeket különböző szempontokból vizsgálhatjuk. Kiszámíthatjuk például, mikor van értelmezve az adott függvény, mikor növekszik vagy csökken (ún. monotonitás), következtethetünk az alakjára (konkáv vagy konvex), illetve megtudhatjuk, mikor és hol éri el maximumát és minimumát, azaz a szélsőértékeit. Az érintőknek elsősorban a monotonitási szakaszok és a konvexitás meghatározásában van jelentős szerepe.

Azonban a függvényvizsgálat elvégzéséhez, ezen belül is a szélsőértékek és az érintők (illetve a kétváltozós függvények esetében majd érintősíkokról beszélünk) kiszámításához szükség van a differenciálszámítás, a mátrixszámítás és a koordinátageometria ismeretére. Először e témakörök alapfogalmairól készítettem egy rövid áttekintést, mely a konkrét számítások könnyebb megértését szolgálja. Emellett törekedtem a minél látványosabb, szemléletesebb ábrázolásra, amihez egy java programot használtam.

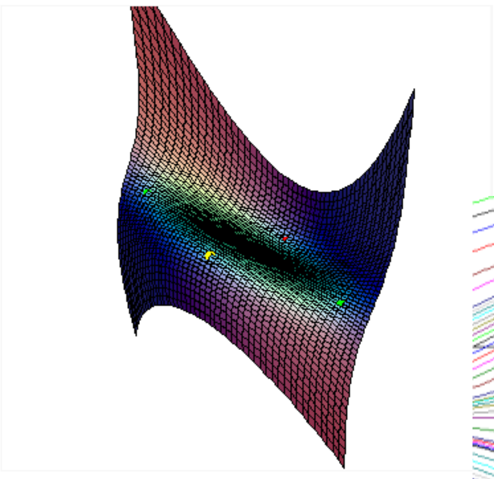
A függvényanalízis és a koordinátageometria a matematika sokak által rettegett területei. A dolgozatommal az volt a célom, hogy megmutassam, megfelelően megközelítve ezek a témakörök is lehetnek barátságosak, érthetőek, amelyek egy idő után ugyanolyan szerves részét képezhetik a tudásnak, mint az 1x1.

2. Kétváltozós függvények meghatározása, ábrázolása, kinézete

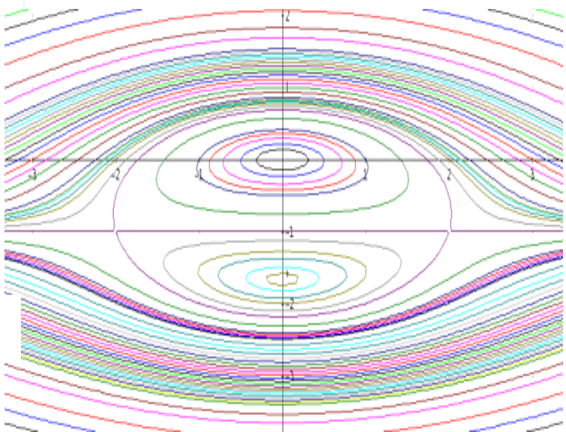
Függvényről akkor beszélünk, amikor egy tetszőleges A halmaz elemeihez hozzárendeljük egy tetszőleges B halmaz elemeit (A és B nem üres halmaz). Egy függvényt akkor tekintünk adottnak, ha A halmaz minden eleméhez B halmaznak pontosan egy elemét rendeltük hozzá, azaz a hozzárendelés egyértelmű. A halmaz a függvény értelmezési tartománya, B halmaz a képhalmaza.

D: Ha egy valós értékű függvény értelmezési tartománya része az $\mathbf{R}^n$ halmaznak, akkor többváltozós vagy pontosabban n változós függvényről beszélünk.[1]

Kétváltozós függvények esetén egy rendezett számpárhoz rendelünk hozzá egy valós számot. Legtöbbször *f: (x, y) → xy* vagy *f: f (x, y) = xy* módon jelöljük őket. Értelmezési tartományuk lehet pl. $\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\mathbf{R}^2$, értékkészletük pedig a valós számok halmaza. Ábrázolásuk



1. ábra: Térbeli ábrázolás



térbeli koordinátarendszerekben történik (1. ábra), általában a Descartes-féle koordinátarendszerben, amelynek x, y és z tengelyei egymásra merőlegesek. Szemléltethetjük őket szintvonalaikkal (ilyenkor a z konstans) (2. ábra) vagy felrajzolhatjuk a $z = f(x, y)$ felületet. Ekkor az (x, y) síkra merőlegesen ábrázoljuk az x, y értékpárhoz tartozó z értékeket, amelyek a legtöbb esetben felületet alkotnak.

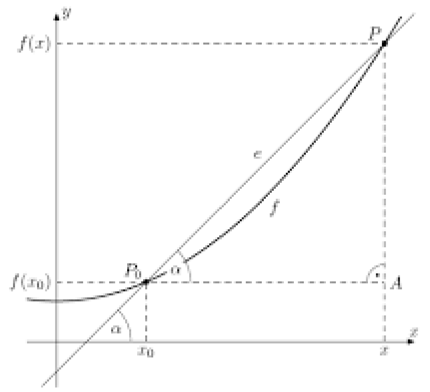
3. Differenciálás

3.1. A differenciálás alapjai

A szélsőértékek és érintők meghatározásához szükségünk van a differenciálszámítás ismeretére. Először ismerkedjünk meg az alapfogalmakkal.

Ha szeretnénk megtudni, hogy a független változó megváltozása milyen változást eredményez a függvényértékben, a két változás hányadosát használhatjuk. Ha a független változót x_0-ról ($x_0+\Delta x$) –re növeljük, az a függő változó $f(x_0)$-ról ($f(x_0)+\Delta f(x)$)–ra való változását eredményezi, így a bevezetett hányados, vagyis a $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$, éppen a görbe x_0 abszcisszájú pontjából az $x_0+\Delta x$ abszcisszájú pontjába húzott szelő iránytangense (3. ábra).

Ezt a hányadost a függvény differenciahányadosának nevezzük. Ez tulajdonképpen azt jelenti, hogy az $f(x)$ függvény differencia-hányadosa a függvény növekménye ($\Delta f(x)$) osztva a független változó növekményével (Δx).



3. ábra: A differenciahányados ábrázolása

A differenciahányados jelölése: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Ha az $y = f(x)$ függvény differenciahányadosának az x = a helyen van határértéke $\Delta x \to 0$ esetén, akkor ezt a határértéket a függvény „a" helyhez tartozó differenciálhányadosának (deriváltjának) nevezzük.

Jelölése:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = f'(a) = y'(a).$$

Ilyenkor azt mondjuk, hogy az $y = f(x)$ függvény az x = a pontban differenciálható. Ha a függvény egy intervallum minden pontjában differenciálható, akkor az intervallumon differenciálhatónak mondjuk; ha értelmezési tartományában mindenütt differenciálható, akkor – röviden – differenciálhatónak nevezzük. Mivel a differenciálhányados értéke csak x-től függ, ezért egy függvény deriváltja szintén egy függvény.[2]

Geometriailag ez azt jelenti, hogy a szelő itt érintőbe megy át, így x = a helyen a differenciálhányados értéke egyenlő a függvénygörbe „a” abszcisszájú pontjában húzott érintő iránytangensével.

Ha egy függvény deriváltját ismét deriváljuk, akkor megkapjuk az eredeti függvény második, harmadik, negyedik stb. n-edik deriváltját. Ezeket az alábbi módon jelölhetjük:[3]

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2f(x)}{dx^2};$$

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^nf(x)}{dx^n}.$$

Ha egy függvényt differenciálni szeretnénk, nem szükséges mindig határértéket számolni. Különböző szabályok könnyítik meg a számítást, a továbbiakban ezeket fogom alkalmazni. Azonban ezek részletezésére most nem térek ki.

3.2. Parciális deriváltak

Kétváltozós függvények esetén a parciális deriválást fogjuk alkalmazni, mivel a két változó nem engedi meg, hogy ugyanúgy, egy lépésben deriváljuk, mint egy egyváltozós függvényt. Külön kell *x* és *y* szerint differenciálni.

D: Legyen *f* egy kétváltozós függvény, (a, b) pedig értelmezési tartományának egy pontja. Ha az

$$f_1: f_1(x) = f(x, b), \qquad (x, b) \in D_f,$$

illetve

$$f_2: f_2(y) = f(a, y), \qquad (a, y) \in D_f$$

egyváltozós függvények (szintvonalak) az a, illetve b pontban differenciálhatók, akkor azt mondjuk, hogy az *f* az (a, b) pontban x (első változó) szerint, illetve y (második változó) szerint parciálisan differenciálható, és parciális differenciálhányadosai az (a, b) pontban:

$f'_1(a)$, illetve $f'_2(b)$.[4]

D: Tegyük fel, hogy az *f* kétváltozós függvény az $A \supset D_f$ halmaz minden pontjában parciálisan differenciálható az x (első változó) szerint. Azt a függvényt, amely A halmaz minden pontjához hozzárendeli az *f* függvény x szerinti parciális differenciálhányadosát, az *f* függvény x szerinti parciális deriváltfüggvényének nevezzük. Hasonlóan definiálható az y szerinti parciális deriváltfüggvény is.[5]

A parciális deriváltfüggvények jelölése:

f'_x vagy $\frac{\partial f}{\partial x}$, illetve f'_y vagy $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Ezek alapján úgy kell az *f* kétváltozós függvényt úgy differenciáljuk parciálisan x szerint, hogy az y-t konstansnak tekintjük. Az y szerinti parciális deriválásnál pedig az x-et tekintjük állandónak.

D: Tegyük fel, hogy egy halmazon léteznek az *f* kétváltozós függvény f'_x és f'_y parciális deriváltfüggvényei, és f'_x, valamint f'_y parciálisan differenciálható valamely (a, b) $\in D_{f'_x} \cap D_{f'_y}$ pontban. Ekkor azt mondjuk, hogy f kétszer parciálisan differenciálható az (a, b) pontban.[6]

D: Legyen az f függvény valamely A halmazon kétszer parciálisan differenciálható. Ekkor az

$f''_{xx} : f''_{xx}(x, y) = (f'_x)'_x(x, y)$,
$f''_{xy} : f''_{xy}(x, y) = (f'_x)'_y(x, y)$,
$f''_{yx} : f''_{yx}(x, y) = (f'_y)'_x(x, y)$,
$f''_{yy} : f''_{yy}(x, y) = (f'_y)'_y(x, y)$, $\quad (x, y) \in A$

függvényeket f második (másodrendű) parciális deriváltfüggvényeinek nevezzük.[7]

Ha az f kétváltozós függvényt többször parciálisan differenciáljuk ugyanazon változó szerint, akkor az így kapott függvényeket az f tiszta parciális deriváltfüggvényeinek nevezzük.

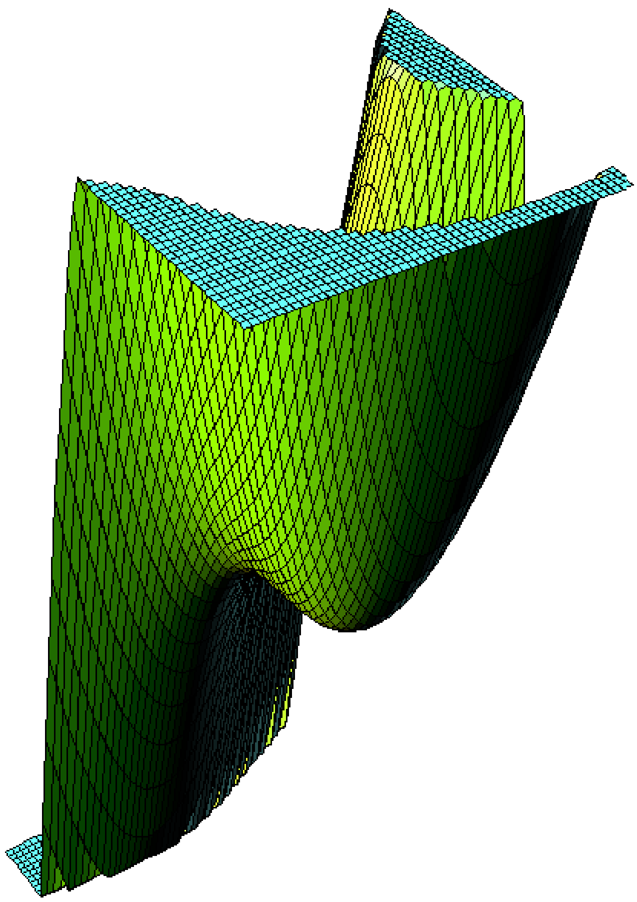
Ha pedig az f kétváltozós függvényt többször parciálisan differenciáljuk, de nem mindig ugyanazon változó szerint, akkor az így kapott függvényeket az f vegyes parciális deriváltfüggvényeinek nevezzük.

T: Ha az f kétváltozós függvénynek az (a, b) pont környezetében léteznek másodrendű parciális deriváltfüggvényei és azok az (a, b) pontban folytonosak, akkor

$f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b)$.[8]

Vegyünk egy tetszőleges kétváltozós függvényt (4. ábra):

$$f(x, y) = 3y^3 + 7xy - 4y^2 + 5x^2$$



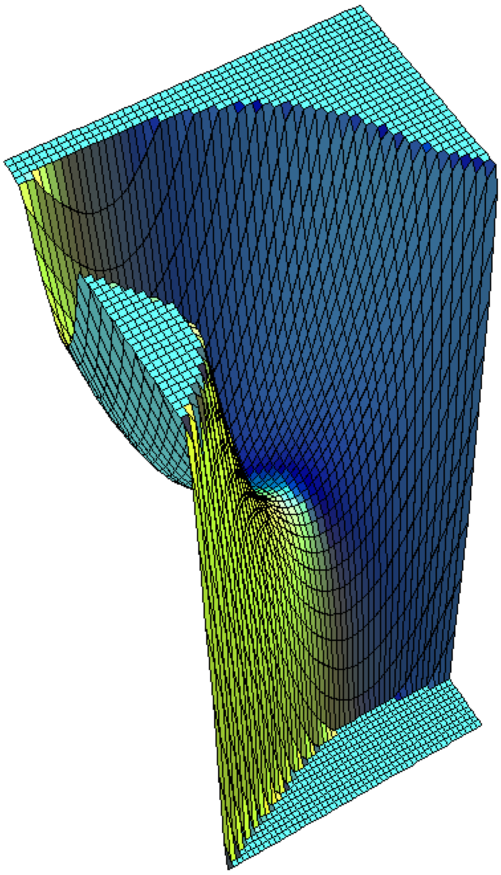
4. ábra: $f(x, y) = 3y^3 + 7xy - 4y^2 + 5x^2$ függvény ábrázolása

A függvény x szerinti első parciális deriváltja: $f'_x(x, y) = 7y + 10x$, y szerinti első parciális deriváltja: $f'_y(x, y) = 9y^2 + 7x - 8y$. A függvény második (másodrendű) parciális deriváltjai a következők:

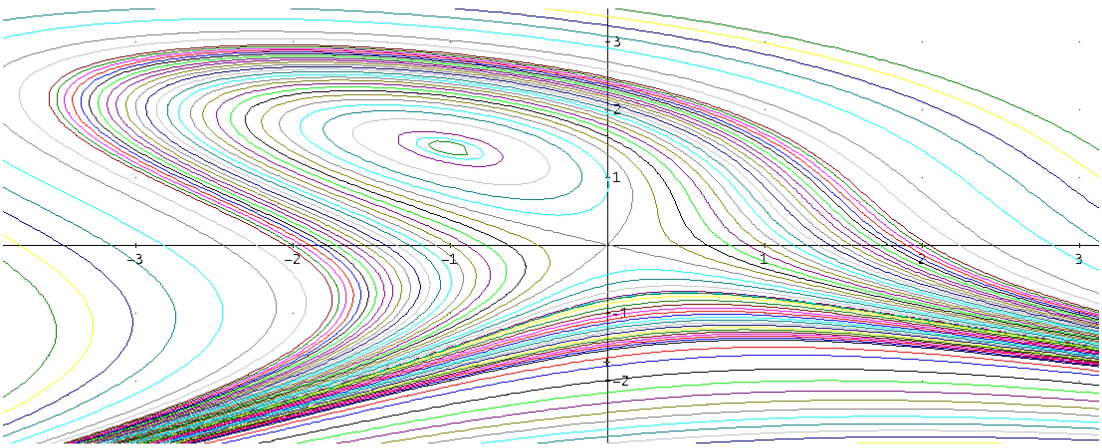
$f''_{xx}(x, y) = 10$
$f''_{xy}(x, y) = 7$
$f''_{yx}(x, y) = 7$
$f''_{yy}(x, y) = 18y - 8$

Látható, hogy $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$, azaz 7 = 7.

Természetesen megvizsgálhatjuk más nézőpontból (5. ábra), vagy ha nem áll rendelkezésünkre megfelelő program, két dimenzióban is ábrázolhatjuk (6. ábra).



5. ábra: A fenti függvény más szemszögből



6. ábra: A függvény szintvonalas ábrázolása

4. Mátrixszámítás

Mátrixnak nevezzük bármilyen n·m számú a_{ik} mennyiség (i = 1, 2, …, n; k = 1, 2, …, m) alábbiak szerinti téglalap alakú elrendezését, amelyet szögletes (esetleg kerek) zárójelbe tesznek: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$

Azt mondjuk, hogy a fenti mátrix n·m típusú, mert n sorból és m oszlopból áll. Az a_{ik} mennyiségek a mátrix elemei; itt az index az elem helyét jelöli: az a_{ik} elem az i-edik sor és a k-adik oszlop találkozásában áll.[9]

Ha egy mátrix sorainak és oszlopainak száma egyenlő (n = m), négyzetes mátrixnak (kvadratikus mátrixnak) nevezzük.

A mátrixnak egy fontos tulajdonsága a determinánsa. Csak négyzetes (szimmetrikus) mátrixnak van determinánsa és ez egy valós szám, amelyet |A|-val vagy det A-val jelölünk:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}$$

A determináns felírásakor tehát a mátrix minden elemét a helyén hagyjuk. A determinánsra szükségünk lesz a mátrix értékének meghatározásánál.

Általában valamilyen $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ elemekből alkotott $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ alakú kifejezést másodrendű determinánsnak nevezünk, amelynek értéke $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Ezt úgy kapjuk meg, hogy az ún. főátló két végén álló elemek szorzatából kivonjuk az ún. mellékátló két végén álló elemek szorzatát.

Rendezzük például 2·2-es mátrixba az előző példa második parciális deriváltjait: $\begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 7 & 18y-8 \end{bmatrix}$. Az ebből képzett determináns: $\begin{vmatrix} 10 & 7 \\ 7 & 18y-8 \end{vmatrix}$, aminek értéke 10·(18y – 8) – 7^2 = 180y - 129. Ezt az eredményt a következőkben még használni fogjuk.

5. Szélsőérték meghatározása

T: Legyen az (a, b) az *f* kétváltozós függvény értelmezési tartományának egy belső pontja. Ha az (a, b) pontban léteznek az *f* parciális deriváltjai és ott *f*-nek lokális szélsőértékhelye van, akkor $f'_x(a, b) = 0$ és $f'_y(a, b) = 0$.[10]

Ennek az a geometriai jelentése, hogy ha a függvénygrafikont az x = a és az y = b síkokkal elmetsszük, az adott pontban az érintő párhuzamos lesz az alapsíkkal. Ez azonban nem elégséges feltétel ahhoz, hogy biztosan megállapíthassuk a szélsőértékeket.

T: Tegyük fel, hogy az *f* kétváltozós függvény valamennyi második parciális deriváltja létezik az (a, b) pontban és azok ott folytonosak. Ha $f'_x(a, b) = 0$ és $f'_y(a, b) = 0$, továbbá

a) $D(a, b) = f''_{xx}(a, b) f''_{yy}(a, b) - [f''_{xy}(a, b)]^2 > 0$ (itt egy 2x2-es mátrixba rendezzük a második parciális deriváltakat, majd ennek vesszük a

determinánsát, aminek értékét a fent leírt módon kaphatjuk meg), akkor *f*-nek az (a, b) pontban lokális szélsőértéke van:
f''_{xx}(a, b) < 0 esetén maximuma,
f''_{xx}(a, b) > 0 esetén minimuma;

b) D(a, b) < 0, akkor *f*-nek az (a, b) pontban nincs lokális szélsőértéke;
c) D(a, b) = 0, akkor annak az eldöntésére, hogy van-e lokális szélsőértéke (a, b)-ben, további vizsgálat szükséges.[11]

Vizsgáljuk meg, hogy az előbbiekben vizsgált függvénynek $f(x, y) = 3y^3 + 7xy - 4y^2 + 5x^2$ vannak-e szélsőértékei!

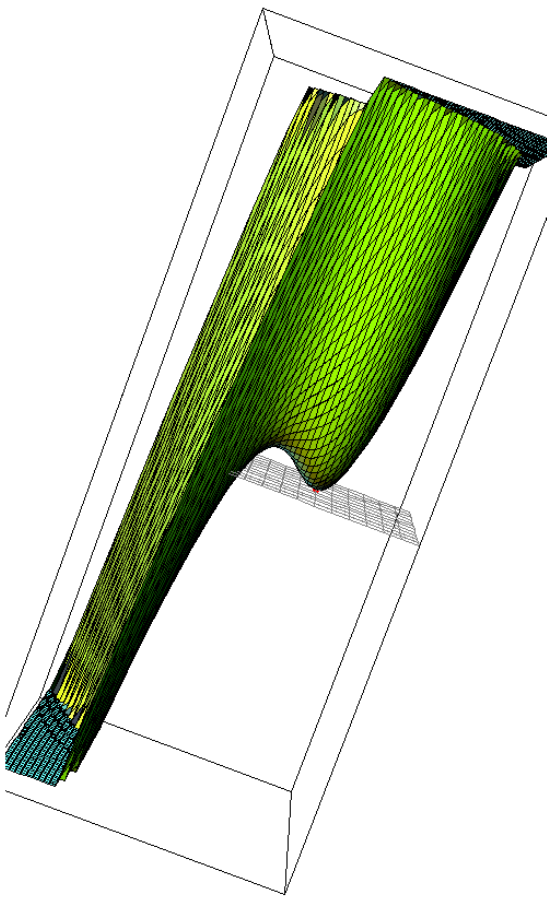
A szélsőérték lehetséges helyei ott vannak, ahol a két első parciális derivált értéke 0, azaz:

$$\begin{cases} \text{I.} \quad f'_x(x, y) = 7y + 10x = 0 \\ \text{II.} \quad f'_y(x, y) = 9y^2 + 7x - 8y = 0 \end{cases}$$

$x_1 = 0$, $y_1 = 0$; $x_2 = -301/300$, $y_2 = 43/30$.

D (0; 0) = 180·0 - 129 = -129, -129<0, tehát *f* (0;0) nem szélsőértékhely, nyeregpont.

D (301/300; 43/30) = 180·43/30 - 129 = 129 129>0, tehát *f* (-301/300; 43/30) szélsőértékhely, f''_{xx}(-301/300; 43/30) = 10 > 0 →minimum (7. ábra). Az ábrán szépen látszik, hogy az érintő párhuzamos az alapsíkkal.



7. ábra: A (-301/300; 43/30) pontbeli érintő

6. Érintő meghatározása

Keressük meg az előző függvény érintőjét az (-1,5; 2) pontban! Ehhez először ki kell számítani a függvényértéket az adott pontban: $z = 3\cdot 2^3+7\cdot(-1{,}5)\cdot 2-4\cdot 2^2+5\cdot(-1{,}5)^2 = -1{,}75$. Ezen kívül ismernünk kell az x és az y szerinti szintvonalak érintőjét, melyeknek vektoriális szorzata segítségével írhatjuk majd fel az érintősík egyenletét. Ha az elsőrendű parciális deriváltakba behelyettesítünk, megkapjuk az érintővektorok felírásához szükséges z értékeket:

$f'_x = 10x + 7y = 10\cdot 1{,}5 + 7\cdot 2 = -1$

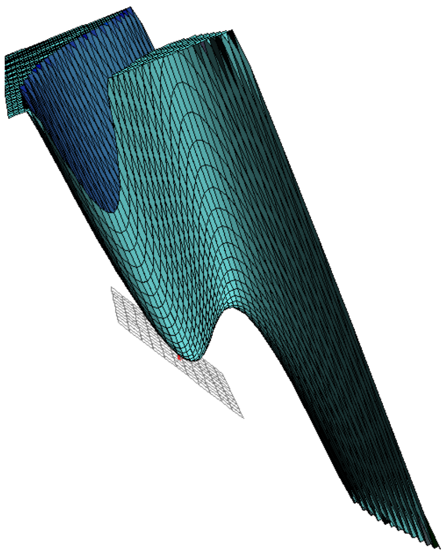
$f'_y = 9y^2 + 7x - 8y = 9\cdot 2^2 + 7\cdot 1{,}5 - 8\cdot 2 = 9{,}5.$

Az így felírt vektorok: $v_x = (1; 0; -1)$, $v_y = (0; 1; 9{,}5)$. Ezek vektoriális szorzatát, azaz az érintősík normálvektorát a következőképpen kaphatjuk meg:

x	y	z	x	y
1	0	-1	1	0
0	1	9,5	0	1

$\vec{n} = (0+1; 0-9{,}5; 1-0) = (1; -9{,}5; 1).$

Ebből egy újabb egyenletet képzünk: $x - 9{,}5y + z = D$. Behelyettesítjük a választott pont értékeit: $-1{,}5 - 9{,}5\cdot 2 - 1{,}75 = D$, így $D = -22{,}25$. Így már fel tudjuk írni az érintősík (8. ábra) egyenletét: $\underline{x - 9{,}5y + z = -22{,}25.}$



8. ábra: A (-1,5; 2) pontbeli érintő

7. Konklúzió

A témám megértésében nagy szerepet játszott, hogy a már kétváltozós függvényeket is könnyen, pontosan, világosan lehet ábrázolni különböző számítógépes programok segítségével. Éppen ezért törekedtem arra, hogy a lehető legtöbb ábrával színesítsem a dolgozatomat is. A legelismertebb matematikai szoftverek nemrég jutottak el olyan szintre, hogy a grafikájuk ilyen látványos megoldásokat tehessen lehetővé. Ez is mutatja, hogy van igény a terület megismerésére.

A felkészülés során rengeteg érdekes módszerrel találkoztam, melyek egy része később iskolai tanulmányaim során is előkerül majd, azonban azt hiszem, sok olyan élményt szereztem, ami enélkül kimaradt volna az életemből. A megértés öröme, amikor nehéz, szakszavaktól hemzsegő definíciók, tételek áttanulmányozása után ráéreztem a differenciálszámítás lényegére; a „viszontlátás" öröme, amikor a parciális differenciáláskor már jó ismerősökként üdvözöltem a deriválásról megszerzett ismereteket; a siker öröme, amikor sok eredménytelen próbálkozást követően találtam egy alkalmas függvényt, később pedig, amikor a sok-sok számítás eredményeképp megjelent a grafikon a képernyőn és tisztán kirajzolódtak rajta a jó megoldások.

Lehet, hogy soha nem találkozom többet ezzel a problémakörrel. Elképzelhető, hogy a matematikával sem fogok foglalkozni. Ám abban egészen biztos vagyok, hogy az elkészítés közben szerzett tapasztalatok életre szólóak maradnak.

8. Hivatkozási jegyzék

[1] Csernyák László: Analízis. – Budapest : Nemzeti Tankönyvkiadó, 1988. – 62. p.- (Matematika üzemgazdászoknak)
[2] Bárczy Barnabás: Differenciálszámítás. – 11. kiadás. – Budapest : Műszaki Könyvkiadó, 2002. – 69. p. – (Bolyai-könyvek)
[3] Bárczy Barnabás: Differenciálszámítás. – 11. kiadás. – Budapest : Műszaki Könyvkiadó, 2002. – 152. p. – (Bolyai-könyvek)
[4] Csernyák László: Analízis. – Budapest : Nemzeti Tankönyvkiadó, 1988. – 156. p. - (Matematika üzemgazdászoknak)
[5] Csernyák László: Analízis. – Budapest : Nemzeti Tankönyvkiadó, 1988. – 158. p. - (Matematika üzemgazdászoknak)
[6] Csernyák László: Analízis. – Budapest : Nemzeti Tankönyvkiadó, 1988. – 159. p. - (Matematika üzemgazdászoknak)
[7] Csernyák László: Analízis. – Budapest : Nemzeti Tankönyvkiadó, 1988. – 159. p. - (Matematika üzemgazdászoknak)
[8] Csernyák László: Analízis. – Budapest : Nemzeti Tankönyvkiadó, 1988. – 161. p. - (Matematika üzemgazdászoknak)
[9] Scharnitzky Viktor: Mátrixszámítás. – 10. kiadás. – Budapest : Műszaki Könyvkiadó, 2006. – 90. p. – (Bolyai-könyvek)
[10] Csernyák László: Analízis. – Budapest : Nemzeti Tankönyvkiadó, 1988. – 196. p. - (Matematika üzemgazdászoknak)
[11] Csernyák László: Analízis. – Budapest : Nemzeti Tankönyvkiadó, 1988. – 197. p. - (Matematika üzemgazdászoknak)

9. Irodalomjegyzék

[BÁRCZY Barnabás] Differenciálszámítás / Bárczy Barnabás. – 11. kiadás. – Budapest : Műszaki Könyvkiadó, 2002. – 279 p. – (Bolyai-könyvek)

[CSERNYÁK László] Analízis / Csernyák László. – Budapest : Nemzeti Tankönyvkiadó, 1988. – 287 p. – (Matematika üzemgazdászoknak)

[FEKETE Zoltán] Többváltozós függvények analízise / Fekete Zoltán, Zalay Miklós. – 2. kiadás. – Budapest : Műszaki Könyvkiadó, 2000. – 359 p. – (Bolyai-könyvek)

[SCHARNITZKY Viktor] Mátrixszámítás / Scharnitzky Viktor. – 10. kiadás – Budapest : Műszaki Könyvkiadó, 2006. – 339 p. – (Bolyai-könyvek)

[URBÁN János] Határérték-számítás / Urbán János. – 4. kiadás. – Budapest : Műszaki Könyvkiadó, 2006. – 451 p. – (Bolyai-könyvek)

[WEIR, Maurice D.] Thomas-féle Kalkulus. 1. köt. / Maurice D. Weir – 2. kiadás. – Budapest : Typotex, 2008. – 351 p.

[WEIR, Maurice D.] Thomas-féle Kalkulus. 3. köt. / Maurice D. Weir – Budapest : Typotex, 2007. – 535 p.