Lehetetlen vagy csak hihetetlen? Ramanujan -1/12 értéke

1+2+3+4+5+6… n

Írta: Bánszki Bea

Felkészítő tanár: Méri Károly

Békéscsabai Belvárosi Általános Iskola és Gimnázium

Tartalomjegyzék

Bevezetés 2

Történelmi háttér 2

Matematikai gyorstalpaló 2

Bizonyítás 4

A bizonyítás bizonyítása 6

Riemann-féle zéta-függvény 9

A várható érték 10

Befejezés 11

Utószó 12

Irodalomjegyzék 13

Bevezetés

Kisiskolás korom óta imádom a matematikát. Szívesen oldok meg nehezebb feladatokat is, az évek során azonban rájöttem, hogy nem szeretek olyan feladatokkal foglalkozni, amelyek a végtelent taglalják. Mert a végtelen számomra nem elképzelhető, felfoghatatlan. Hogyan tudnék egy olyan valamivel számolni, amit nem látok magam előtt, nem tudok megfogni? Egyáltalán létezik a végtelen?

Aztán találkoztam egy számítással, ami a pozitív egész számok összegét szeretné megadni. A végtelenig. Mi lehet, ha a végtelenségig adom össze a számokat? Természetesen végtelen. Vagy mégsem? Ebben a dolgozatban ezt a témát járom körül.

Történelmi háttér

Talán a legtöbbet ezzel a témával egy indiai matematikus, Srinivasa Ramanujan foglalkozott. Ramanujan szegény családból származott, emiatt iskolai tanulmányokat sem tudott folytatni, de matematikai zsenialitása így is a felszínre tört. Felnőttként leveleket küldött először indiai, majd angol matematikusoknak, amelyekben saját maga által megfogalmazott tételeket, összefüggéseket közölt, így próbált egy kis anyagi, illetve szellemi támogatást szerezni a már elismert tudósoktól. Azonban a legtöbb általa taglalt információt már előtte felfedezték és használták is (nem voltak könyvei, így ő ezekről nem tudott), ezért a legtöbben válaszra sem méltatták. 1913-ban jutott el a levele az angol G. H. Hardyhoz. a körülbelül 120 képlet mellett, ami az írásban szerepelt, helyet kapott ez a sor is:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 \dots n = -\frac{1}{12}$$

Már első ránézésre, gondolkodás nélkül mondhatjuk, hogy ez lehetetlen. Hogy gondolhatja bárki is, hogy ha pozitív egész számokat adunk össze a végtelenig, akkor az eredmény tört lesz, ráadásul negatív? A dolgozatom végére remélem sikerül meggyőznöm az Olvasót, hogy ez mégis lehetséges.

Matematikai gyorstalpaló

Tehát a sorozatunk $1 + 2 + 3 + 4 + 5 \dots n$; mivel számtani sorozatról van szó, ahol a *d=1;* használhatjuk a számtani sorozat első *n* elemének összegképletét: $S_n = \frac{1+n}{2}n$. Vizsgáljuk meg ennek a sorozatnak a határértékét: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n}{2}n\right) = \infty$. Hogyan lesz ebből $-\frac{1}{12}$?

A dolgozatban nemcsak a számtani sorozat, hanem a mértani sorozat is fontos szerepet fog játszani. Nézzük meg a mértani sorozat összegképletét, illetve annak határértékét is:

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 \dots + a_1 q^n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[a_1\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)\right] = \frac{a_1}{1-q}; \quad \text{ha } (-1) < q < 1$$

Fontos megemlíteni a kikötést, hiszen csak ekkor használhatjuk a kapott kifejezést. Érdemes azonban foglalkozni azzal, hogy milyen eredményt kaphatunk akkor, ha a q kiesik a megadott tartományból:

- ha $q > 1 \rightarrow \lim_{n\to\infty}\left[a_1\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)\right] = \infty$
- ha $q = 1 \rightarrow \lim_{n\to\infty}\left[a_1\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)\right] = 1$
- ha $q = -1 \rightarrow \lim_{n\to\infty}\left[a_1\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)\right] = ??\,(a\ dolgozatban\ még\ szó\ lesz\ róla)$
- ha $q < -1 \rightarrow \lim_{n\to\infty}\left[a_1\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)\right] = divergens$

Mint már említettem, a végtelennel foglalkozó feladatok nem tartoznak a kedvenceim közé, hiszen nem lehet mindig egyértelmű megoldást kapni a problémára. Itt egy példa: vegyük az összes *5*-tel és *10*-zel osztható számot. Tudjuk, hogy mindkettőből végtelen sok van, így az összegük is végtelen nagy. Most vonjuk ki a *10*-zel osztható számokból az *5*-tel oszthatóakat:

$$\begin{array}{r} x|10 \rightarrow 10; 20; 30; 40; 50; \dots n \\ - x|5 \rightarrow 5; 10; 15; 20; 25; \dots n \\ \hline 5; 10; 15; 20; 25; 30; \dots n \end{array}$$

Mint látjuk, a kivonás elvégzése után eredményül az *5*-tel osztható számokat kaptuk. De hogyan lehetséges ez, ha az *5*-tel és a *10*-zel osztható számokból is ugyanannyi, vagyis végtelen sok van? Pedig, ha az első néhány elemet megnézzük, úgy tűnik, hogy *10*-zel osztható számból kevesebbnek kellene lennie, a kivonás elvégzése után ennek ellenére nem ez látszik, hiszen maradtak még elemek. Viszont ha másképp végezzük el kivonást, mégpedig úgy, hogy csak minden második *5*-tel osztható számot vonunk ki a *10*-zel osztható számokból, teljesen más végeredményt kapunk. (Ezt az eltolásos módszert később is fogjuk még használni.) Tehát elvileg ugyanazt a műveletet elvégezve két különböző eredményt kaptunk. Melyik a helyes végeredmény? Esetleg mind a kettő elfogadható?

$$\begin{array}{r} x|10 \rightarrow \quad 10; \quad 20; \quad 30; \quad 40; \quad \dots n \\ - x|5 \rightarrow 5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40 \dots n \\ \hline 5; \quad 15; \quad 25; \quad 35; \quad \dots n \end{array}$$

Bizonyítás

Tehát az $1+2+3+4+5\ldots n$ végtelen sorozat összegét szeretnénk meghatározni, legyen ez az érték $\boldsymbol{A}$. Ezt szabályosan nem tekinthetjük egyenletnek, de matematikailag úgy kezeljük, mint egy egyszerű egyenletet, így a dolgozat további részében az egyszerűség kedvéért egyenletnek fogjuk nevezni.

A mérleg elvet használva vegyük az egyenlet négyszeresét.

$$\boldsymbol{4A} = 4+8+12+16+20\ldots$$

Felmerülhet a kérdés, hogy hogyan lehetne ezt elképzelni, hogyan vehetem a végtelennek a négyszeresét? Egyáltalán szabad ilyet csinálni? Tekintsük el a kétkedő kisördögöktől, és ha már a végtelennel játszadozunk, akkor vonjuk is ki a fentebb szereplő egyenletet az eredeti egyenletünkből.

$$\begin{array}{r} \boldsymbol{A} = 1+2+3+4+5+6+\ldots n \\ -\,\boldsymbol{4A} = \quad 4+ \qquad 8+ \qquad 12+\ldots n \\ \hline \boldsymbol{-3A} = 1-2+3-4+5-6+\ldots n \end{array}$$

Az egyenletet eltoltuk úgy, hogy a *2*-es alá a *4*-es, a *4*-es alá a *8*-as, a *6*-os alá a *12*-es kerüljön és így tovább, de mivel a végtelenségig folytatjuk a műveletet, az eltolásnak nincs jelentősége. Hiszen akár úgy is vehetjük, hogy az üres helyekre 0-kat írunk, ami növeli az összeadásban szereplő tagok számát, de a végeredményt nem befolyásolja (vagy mégis?). A kapott eredmény nagyon hasonlít az eredeti egyenletre, a különbség annyi, hogy a $\pm$ előjelek felváltva váltják egymást.

Ha már úgyis feszegetjük a matematika határait, vegyük a kapott egyenlet kétszeresét. Lehet? Ha az eddigi lépéseinket is lehetségesnek ítéltük, akkor ezen az apróságon már biztosan nem múlik!

$$\begin{array}{r} \boldsymbol{-3A} = 1-2+3-4+5-6+\ldots \\ +\ (\boldsymbol{-3A})\ = +1-2+3-4+5-6+\ldots \\ \hline \boldsymbol{-6A} = 1-1+1-1+1-1\ldots \end{array}$$

Ahogy fentebb látszik, ismét eltoltuk a művelet végrehajtását, *1*-hez nem adtunk hozzá semmit, *-2*-höz *+1*-et rendeltünk, *+3*-hoz *-2*-t és így tovább.

Vajon mi lesz a kapott egyenletnek az összege? Be kell látnunk, hogy nem lehet egyértelműen meghatározni, hogy mi lesz a végeredmény, de a meghatározására több módszer is létezik.

1. *Zárójelek használatával:*

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1\ldots=\mathbf{0}$$

Zárójelekben az összeg mindig *0* lesz, ha végtelenszer adjuk össze a *0*-t az összegük szintén *0* lesz.

$$1(-1+1)(-1+1)(-1+1)(-1+1)\ldots=$$
$$1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)\ldots=$$
$$1+0+0+0+0+0+0\ldots=\mathbf{1}$$

Ha máshova tesszük a zárójeleket, a zárójelekben az összeg szintén *0* lesz, de a zárójelek között összeadás van, így az első *+1*-t kihagyva a csoportosításból az összegünk *1* lett.

2. *Kivonással:*

$$1-1+1-1+1-1\ldots=\boldsymbol{B}$$
$$1-\boldsymbol{B}=1-(1-1+1-1+1-1+1-1+1\ldots)$$
$$1-\boldsymbol{B}=1-1+1-1+1-1+1-1+1=\boldsymbol{B}$$
$$1-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}$$
$$1=2\boldsymbol{B}$$
$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}=\boldsymbol{B}$$

Ha az eredeti egyenletet kivonjuk *1*-ből, ugyanazt az egyenletet kapjuk vissza, az átrendezés végén pedig az eredmény megdöbbentően ½ lett. Jobban belegondolva ez nem is olyan meglepő, hiszen ha az első megoldási módszer eredményeit átlagoljuk, szintén ½ lesz a végeredmény.

Ha ezt az eredményt elfogadjuk, hogy $1-1+1-1+1-1\ldots=\frac{1}{2}$; visszatérhetünk az eredeti problémához.

$$\boldsymbol{-6A}=1-1+1-1+1-1\ldots=\frac{1}{2}$$
$$\boldsymbol{A}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}$$

Tehát sikerült megkapnunk a dolgozat elején megjósolt eredményt: $1+2+3+\ldots n=-\frac{1}{12}$. De biztos mindent jól csináltunk? A jó matematikus ellenőrzi a végeredményét, és mi is ezt fogjuk tenni.

A bizonyítás bizonyítása

Az előző fejezetben sokszor elbizonytalanodtunk, hogy szabályosak-e azok a lépések, amelyek alkalmazásával megkaptunk a hihetetlen $-\frac{1}{12}$ végeredményt. Hiszen olyan műveleteket végeztünk el, illetve fogunk még elvégezni a következő oldalakon, amik egy egyszerű, hagyományos egyenletnél természetesek. Azonban végtelen soroknál, pontosabban divergens végtelen soroknál az eltolás, kivonás, szorzás, asszociativitás és kommutativitás nem biztos, hogy egyértelműen alkalmazhatóak. Ennek ellenére még nem zárható ki biztosan, hogy a lépéseink helyesek vagy helytelenek, hiszen léteznek olyan harmonikus sorok, amelyek átrendezéssel divergenssé is tehetőek, de elérhető az is, hogy az összegük tetszőleges, előre megadott szám legyen.[1]

Ezért most visszafele indulunk el, még egyszer végiggondolva a lépéseket, illetve, több megoldási módszert is alkalmazva próbáljuk meg bebizonyítani az igazunkat.

Először nézzük az $1-1+1-1+1-1\ldots=\boldsymbol{B}$ értéket. Ha a középiskolai matematika oktatás keretein belül szeretnénk maradni, nem is szabadna foglalkoznunk azzal, hogy hogyan is kaphatnánk meg ennek a sornak az összegét, hiszen egyértelműen egy divergens sorról van szó. Ennek ellenére mégis szeretnénk választ kapni a kérdésre. Ezzel az egyenlettel már több híres matematikus is foglalkozott a történelem során, a fentebb bemutatott zárójeles megoldást például Leibniz alkalmazta[2]. Az interneten is található több tanulmány, illetve szakkönyv, ami megemlíti ezt a problémát. Az érdekes az, hogy míg egyesek szerint nem kaphatunk egyértelmű eredményt, vannak olyanok, akik minden kétséget kizárólag elfogadják eredményül az ½-et. Mielőtt újragondolnánk a megoldásunk helyességét, tisztázzunk néhány fogalmat.

Végtelen mértani sorról van szó, ha az a_1 a sor első eleme, a q az az állandó, amit ha n-edikre emelünk, megkapjuk a sorozat a_n-edik elemét:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_1\, q^n$$

A mértani sor **konvergens**, ha $|q|<1$; ekkor az összege: $\frac{a_1}{1-q}$; minden más esetben a sor **divergens** $(|q|\leq 1)$. Konvergens sor esetén egyértelműen meghatározható a sor szummája, azaz hogy hová tart.

[1] Lásd: *George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass,* Thomas-féle kalkulus 3. (105. o. 6. példa)
[2] *Pressing Dániel*, Érdekes összegek (8. o.)

A mi sorunk így nézne ki: $\sum_{n=0}^{\infty} 1(-1)^n$; ahol $a_1 = 1$ és $q = (-1)$; tehát be kell látnunk, hogy e kritérium alapján ennek a sornak divergensnek kell lennie, így nem lehet egyértelműen meghatározni az összegét. Ennek ellenére, ha behelyettesítjük a $q = (-1)$ értéket, akkor megkapjuk az ½ végeredményt.[3]

Azonban vannak különleges esetek, amikor a divergens végtelen sornak is meg tudjuk határozni az összegét, ezek a különböző szummációs eljárások. (A szummációs módszerek két alapkövetelménynek kell hogy megfeleljenek, ezek a permanencia és a konzisztencia elve.[4]) Ezt a részletösszegek kiszámításával kaphatjuk meg. *Azt mondjuk, hogy a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *végtelen sor szummábilis és a szummája A, ha az* $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ *részletösszegekre teljesül, hogy:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1} = A$$

Ahhoz, hogy használni tudjuk ezt a megoldási módszert és a képletét, két részletben kell megoldanunk a feladatot. Meg kell különböztetnünk, hogy az *n* értéke páros-e vagy páratlan.

$$s_n = 1 - 1 + 1 - 1 \dots$$

Páros *n* esetén:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1} = \frac{1 + 0 + 1 + 0 \dots}{n+1} = \frac{\frac{n}{2} + 1}{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

Páratlan *n* esetén:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1} = \frac{1 + 0 + 1 + 0 \dots}{n+1} = \frac{\frac{1}{2}(n+1)}{n+1} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

Ez alapján egyértelműen kimondható, hogy a sor szummája ½; annak ellenére, hogy a sor divergens.[5]

Foglalkozzunk a következő, $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 \dots = \boldsymbol{C}$ egyenlettel. A bizonyításban ennek összegéül ¼ -et kaptunk. Hogyan lehetséges ez? Térjünk vissza az előző egyenlethez:

$$\boldsymbol{B} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots = \frac{1}{2}$$

Emeljük négyzetre:

$$\boldsymbol{B^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = (1 - 1 + 1 - 1 \dots)^2 = (1 - 1 + 1 - 1 \dots)(1 - 1 + 1 - 1 \dots)$$

---

[3] Németh József: Előadások a végtelen sorokról (194. o.)
[4] Bővebben: Mikolás Miklós: Valós függvénytan és ortogonális sorok (313. o.)
[5] Laczkovich Miklós – T. Sós Vera: Analízis II. (239. o.)

×	+1	−1	+1	−1	+1	−1	...
+1	+1	−1	+1	−1	+1	−1	
−1	−1	+1	−1	+1	−1	+1	
+1	+1	−1	+1	−1	+1	−1	
−1	−1	+1	−1	+1	−1	+1	
+1	+1	−1	+1	−1	+1	−1	
−1	−1	+1	−1	+1	−1	+1	
...							

A táblázat jól szemlélteti, hogyha a kapott szorzatokat átlósan összeadjuk, megkapjuk a keresett egyenletünket:

$$(1-1+1-1+1\ldots)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \mathbf{1} - \mathbf{2} + \mathbf{3} - \mathbf{4} + \mathbf{5} - \mathbf{6} \ldots = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

Megpróbálhatjuk használni az előző feladatban ismertetett részletösszeg sorozatok módszerét is, hogy ellenőrizzük a megoldás helyességét:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1} = \frac{1 + (-1) + 2 + (-2) + 3 + (-3) \ldots}{n+1}$$

Páros *n* esetén az összeg *0*; Páratlan *n* esetén: $\frac{n+2}{2\,(n+1)} = \frac{1}{2}$

A részletösszegek számtani közepéből álló sornak két torlódási pontja van, így a sor nem szummábilis. Ez azonban még nem azt jelenti, hogy nem tudjuk megadni a sor összegét. Otto Hölder német matematikus nevéhez fűződik a Hölder-szummáció, melynek lényege, hogy annyiszor végezzük el a részletösszegek sorozatainak az összeadását, amíg egyértelmű eredményt nem kapunk. Ilyenkor az első részletösszeg összeadást (H,1)-szummációnak, az n-edik összeadást (H,n)-szummációnak nevezzük.

$$H_n^1 = \frac{s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n}{n} = \begin{cases} 0 \quad ha\ 2|n \\ \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \quad ha\ 2 \nmid n \end{cases}$$

$$H_n^2 = \frac{H_1^1 + H_2^1 + H_3^1 + \ldots + H_n^1}{n} \to \frac{1}{4}$$

Tehát az $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots n = \boldsymbol{C}$ sor (H,2)-szummábilis, és szummája ¼ .[6] Vagyis mindkét megoldási módszer alkalmazásával ugyanazt az eredményt kaptuk, így egyre inkább megbizonyosodhatunk arról, hogy helyesen dolgoztunk.

Riemann-féle zéta-függvény

A végtelen problémája már a kezdetektől fogva foglalkoztatja a matematikusokat. Leibniz, Euler és Fourier munkásságainak is a része volt ez a kérdéskör, de a XVIII. században még nem voltak kidolgozva és általánosan elfogadva a végtelen sorokkal kapcsolatos tételek, így mindenki úgy értelmezte azokat, ahogyan ő gondolta. Ennek a hibának a kiküszöbölésében fontos szerepe volt Cauchynak, aki az 1823-ban megjelent tanulmányában meghatározta a sorelmélet szigorú, precíz leírását. Több fogalmat is definiált (például sor összege, divergencia definíciója), és megfogalmazta a később róla elnevezett konvergencia kritériumot, valamint több ilyen konvergencia kritériumot bizonyított is (gyök-, hányados-, majoráns-, minoráns-kritériumok).[7]

Természetesen Cauchy után is foglalkoztak a végtelen sorokkal, de még napjainkban is vannak olyan kérdések, amik még megválaszolásra várnak.[8] És ez a dolgozat is egy ilyen problémával foglalkozik

A matematika történelme során talán az egyik legnagyobb kérdőjel Riemann nevéhez kapcsolódik, ez pedig a Rimann-féle zéta-függvény:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots \frac{1}{n^s} \quad ha\ (s) > 1$$

Elvileg az s helyére bármilyen 1-nél nagyobb komplex számot írhatunk, ekkor a függvény konvergens, és meg tudjuk mondani a határértékét. Ezért még csak gondolnunk sem szabadna arra, hogy az s értékének -1-et adunk meg. (De a határok átlépése az előző oldalakon sem jelentett akadályt.)

$$\zeta(-1) = \frac{1}{1^{-1}} + \frac{1}{2^{-1}} + \frac{1}{3^{-1}} + \ldots \frac{1}{n^{-1}}$$

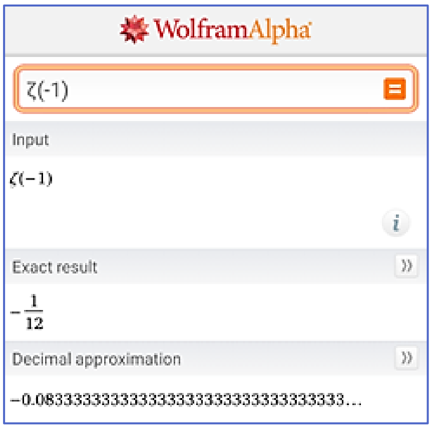
Ez pedig nem más, mint a pozitív egész számok összege, vagyis a dolgozat alapfeladata.

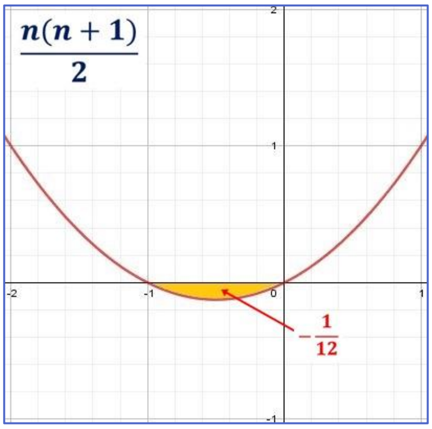
$$\zeta(-1) = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$$

És vajon mit ad a függvény eredményül? $-\frac{1}{12}$-et.

[6] Bővebben: Szabó Szilárd: Divergens sorok (22. o.)
[7] További konvergenciakritériumok: Koreczki Bence: Sorok konvergenciakritériumai.
[8] A sorelmélet fejlődéséről bővebben: Németh József: Előadások a végtelen sorokról (167-205. o. – Történeti áttekintés)

Ha még mindig vannak kételkedők, íme, egy újabb kapcsolat: már a dolgozat elején is szerepelt, hogy a természetes számok halmazán értelmezett függvényünk egy számtani sorozat, amelynek meg lehet határozni az összegét: $S_n = \frac{1+n}{2}n = \frac{n(n+1)}{2}$. Ezt az összefüggést függvényként ábrázolva a valós számok halmazán a koordináta rendszerben egy parabolát kapunk. Ennek a parabolának az *x* tengely alatti területét, ha kiszámoljuk, egy olyan számot kapunk eredményül, amin már annyira meg sem lepődünk. Ez pedig a $-\frac{1}{12}$.





$$\int_{-1}^{0} \frac{x(x+1)}{2}\,dx = -\frac{1}{12}$$

A várható érték

Akármennyire is győzködjük magunkat, és találunk újabb és újabb összefüggést, ami bizonyítja, hogy a számításaink helyesek, azt hinni, hogy a természetes számok összege egy negatív tört lesz, abszurdum. Azonban tudunk említeni más hasonló kérdést a matematikában, ami hasonló problémával áll szembe.

Társasjátékozás során mindig megvan az az érték, amit nagyon szeretnénk dobni a dobókockával, ahhoz, hogy mi érjünk először célba. Matematika kedvelők révén, gyorsan ki is számolhatjuk, hogy mennyi az esélye annak, hogy ezt vagy azt fogjuk dobni, de az is kiszámolható, hogy mi az a várható érték, amit egy-egy dobás alkalmával kaphatunk. Ehhez pedig nem kell mást tennünk, mint összeadjuk a dobókockán szereplő számokat és megszorozzuk azok valószínűségével

$$1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

Az eredményünk *3,5* lett. Természetesen, ez nem lehetséges, hogy ennyit dobjunk, hiszen ilyen szám nem található a kockán. Körülbelül ugyanannyi az esélye annak, hogy *3,5*-öt fogunk dobni, mint hogy ha összeadjuk a számokat 1-től a végtelenig, akkor $-\frac{1}{12}$-et fogunk kapni eredményül.

Ugyanezzel a módszerrel megvizsgálhatjuk a $1-1+1-1+1-1\ldots = \boldsymbol{B}$ várható értékét is. Az eredmény pedig megegyezik a dolgozatban már fentebb szereplő eredménnyel.

$$1\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Befejezés

Már oda-vissza körbejártuk a problémát, és többször is bebizonyítottuk, hogy a feltevés, miszerint $1+2+3+4+\ldots n=-\frac{1}{12}$ igaz lehet. Azonban ennek az írásnak nem célja állást foglalni, hiszen az előző oldalakon olyan kérdéseket bolygattunk, amelyekre a történelem legnagyobb matematikusai sem tudtak egyértelmű, mindenki által elfogadott választ adni.

Be kell ismernünk, hogy ha a középiskolai matematika keretein belül maradunk, akkor ez az esszé nem sikeredhetett volna ilyen hosszúra, hiszen egy mondattal le is zárhattuk volna az egész problémát, miszerint a sor divergens, nem tudjuk megmondani az összegét. De azt is tanítják a gimnáziumban, hogyha a másodfokú egyenlet megoldóképletében negatív számot kapunk a gyökjel alatt, akkor annak nincs megoldása. Ez pedig nem igaz: kapunk megoldást, csak éppen a komplex síkon.

Tehát nem szabad rögtön megállni az első akadálynál, a képzeletbeli határvonalat nyugodtan átléphetjük, de nem árt ismernünk minden szabályt, hogy tisztában legyünk a következményekkel. Hiszen ezt teszik most és tették régen is a matematikusok. Ezért érdemes foglalkozni például a divergens sorokkal. Euler szavaival élve: *„meglehetős joggal vethetjük fel azt a kifogást, hogy ezek az összegzések, bár nem tűnnek igaznak, sosem vezetnek hibákhoz. Sőt, ha megengedjük őket, számos nagyszerű eredményt fedezhetünk fel, amelyeket nem tehetnénk meg, ha eleve elutasítanánk őket. Továbbá, ha ezek az összegzések valóban hamisak lennének, nem vezethetnének következetesen igaz eredményekhez."*[9]

A magam részéről örülök, hogy egy ilyen érdekes és szép témával foglalkozhattam, és hatalmas sikerélményként élem meg azt a rengeteg tudás megszerzését, amivel ennek a dolgozatnak az elkészítése alatt gazdagodtam. Habár ez az írás nem tartalmaz hatalmas matematikát, de a háttérmunka, a rengeteg könyv és internetes oldal böngészése, és az információk összefűzése egy dolgozatba sok erőfeszítést igényelt, ezért úgy érzem, hogy az energia, amit belefektettem ebbe a munkába, megér egy képzeletbeli ötöst.

[9] Laczkovich Miklós – T. Sós Vera: Analízis II. (244. o.)

Utószó

Záró gondolatként köszönet illeti Srinivasa Ramanujant, hiszen a dolgozat alapváza, hogy vegyük a feladat négyszeresét, tőle származik. Mert mi lenne akkor, ha első lépésként nem 4-gyel, hanem például 6-tal szoroztunk volna, és azt vontuk volna ki az alapfeladatból?

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 \ldots \\ -\mathbf{6A} &= \qquad -6 \qquad - 12 \qquad - 18 \qquad - 24 \ldots \\ \hline -\mathbf{5A} &= 1 + 2 - 3 + 4 + 5 - 6 + 7 + 8 - 9 + 10 + 11 - 12 \ldots \end{aligned}$$

$$-\mathbf{5A} = 3 + 6 + 9 + 12 \ldots = 3(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots)$$

$$-\mathbf{5A} = \mathbf{3A}\ ???$$

Mint láthatjuk, ebből nem folytathattuk volna a gondolatmenetünket. De hogyan jött rá Ramanujan, hogy mivel kell szoroznia? Ezt valószínűleg csak ő tudná megmondani.[10]

Végezetül szeretnék köszönetet mondani felkészítő tanáromnak, *Méri Károlynak*, akinek nagy szerepe van abban, hogy ennyire megszerettem a matematikát, és hálás vagyok, hogy egy ilyen kiváló pedagógustól tanulhatok immáron hat éve. És természetesen ez a dolgozat sem születhetett volna meg az ő útmutatása és segítsége nélkül.

[10] Hasonló probléma szerepel George B. Thomas Thomas-féle kalkulus c. könyvében (108. o. 62. feladat)

Irodalomjegyzék

[1] Koreczki Bence, Sorok konvergenciakritériumai (szakdolgozat)
https://web.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_matelem/2010/koreczki_bence.pdf

[2] Laczkovich Miklós, T. Sós Vera, Analízis II – Bp.: Nemzeti Tankönyvkiadó Zrt., 2007.

[3] Lajkó Károly, Analízis I. - http://zeus.nyf.hu/~mattan/faliujsag/lajko/an1.pdf

[4] Mathologer, Numberphile v. Math: the truth about 1+2+3+...=-1/12.
https://www.youtube.com/watch?v=YuIIjLr6vUA&t=2062s

[5] Mikolás Miklós, Valós függvénytan és ortogonális sorok – Bp.: Tankönyvkiadó, 1978.

[6] Németh József, Előadások a végtelen sorokról – Szeged: SZTE Bolyai Intézet, 2002. (Polygon Könyvtár)

[7] Pressing Dániel, Érdekes összegek (szakdolgozat)
http://abesenyei.web.elte.hu/theses/pressing.pdf

[8] Szabó Szilárd, Divergens sorok (szakdolgozat)
https://web.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_mattan/2015/szabo_szilard.pdf

[9] George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass, Thomas-féle kalkulus 3. – Bp.: Typotex Kiadó, 2007.