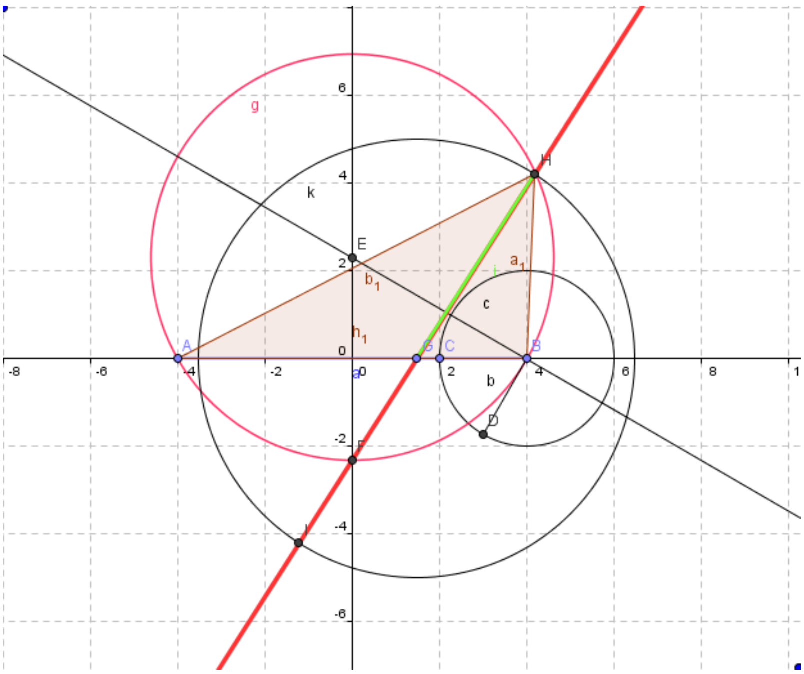
BÉKÉSCSABAI BELVÁROSI ÁLTALÁNOS ISKOLA
ÉS GIMNÁZIUM

Egy szerkesztés nehézségei



Készítette: Kovács Nóra Témavezető: Méri Károly

2016.

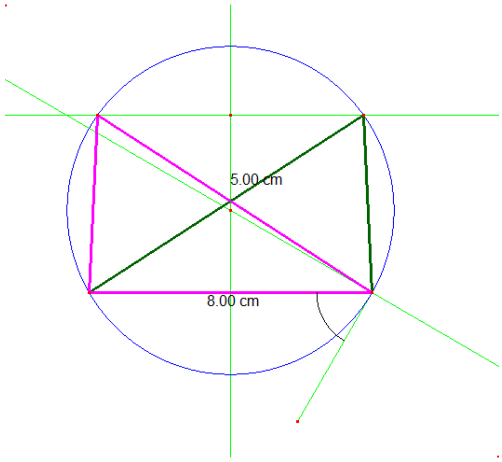
Tartalom

1. Bevezetés

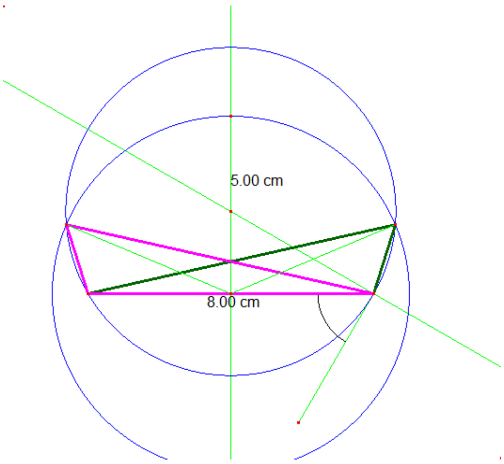
Az emelt szintű matematika órákon mielőtt elkezdtük volna részletesen tanulni a koordináta-geometriát, különböző háromszögeket vizsgáltunk meg szerkeszthetőség szempontjából. A háromszögeknek meg volt adva három adata, és ezek alapján kellett ábrázolnunk. A feladatok közt ilyen példákkal találkoztunk:

1. szerkesztés: Adott a háromszög alapja, az alappal szemközti szög és az alaphoz tartozó magasság.

Felvesszük az alapot, ami 8 cm. Innen 60°-os látókörívet szerkesztünk. A látókörívet úgy szerkesztjük meg, hogy felveszünk egy 60°-os szöget az alap egyik végpontjából körző segítségével, majd kiegészítjük 90°-osra a szakasz másik oldalán. Ez adja a metszéspontot az alap szakaszfelező merőlegesén, amelyből körívezve kapjuk az ábrán látható kört. Majd a magasságvonal azon tulajdonságát kihasználva, hogy merőleges arra az oldalra, amelyhez tartozik, 5 cm-re (=magasság) párhuzamost húzunk az alappal. A kör és a párhuzamos egyenes metszéspontja(i) a megoldás(ok).



alap: 8 cm, szemközti szög: 60 ˚, magasság: 5 cm



alap: 8 cm, szemközti szög: 60˚, súlyvonal: 5 cm

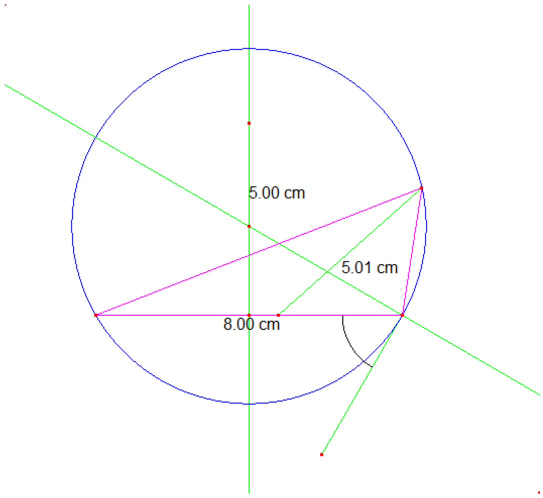
2. szerkesztés: Adott a háromszög alapja, az alappal szemközti szög és az alaphoz tartozó súlyvonal.

Először felvesszük a 8 cm-es alapot, majd erre 60°-os látókörívet szerkesztünk. A látókörív szerkesztési menete megegyezik az előző szerkesztésnél leírtakkal. A súlyvonal azon tulajdonságát kihasználva, hogy felezi az oldalt és összeköti azt a szemközti csúccsal, az alap felezési pontjából 5 cm sugarú kört veszünk fel. A körök metszéspontja(i) adják a megoldás(oka)t.

Ahogy sorra oldottuk a feladatokat, egyszer csak a következő feladványba botlottunk:

Harmadik szerkesztés: Adott a háromszög alapja, az alappal szemközti szög és az alaphoz tartozó szögfelező hossza.

Felvesszük az alapot, majd az előzőekhez hasonlóan megszerkesztjük a látókörívet. Eddig a lépésig az osztály minden tagja eljutott, viszont ezután nagy csönd lett a teremben. Az előző feladatokban mindig lehetett sejteni, hogy hova kell leszúrni a körző végét, vagy hova kell letenni a vonalzót. Mivel a szögfelezőről nem lehet tudni, hogy hol metszi el az alapot, a körzőt nem tudni hova kell illeszteni, ezért más módszerhez kell folyamodni, ha egyáltalán meg lehet szerkeszteni ezt a háromszöget, ha ezek az adatai vannak megadva. A továbbiakban erre keresek megoldást.

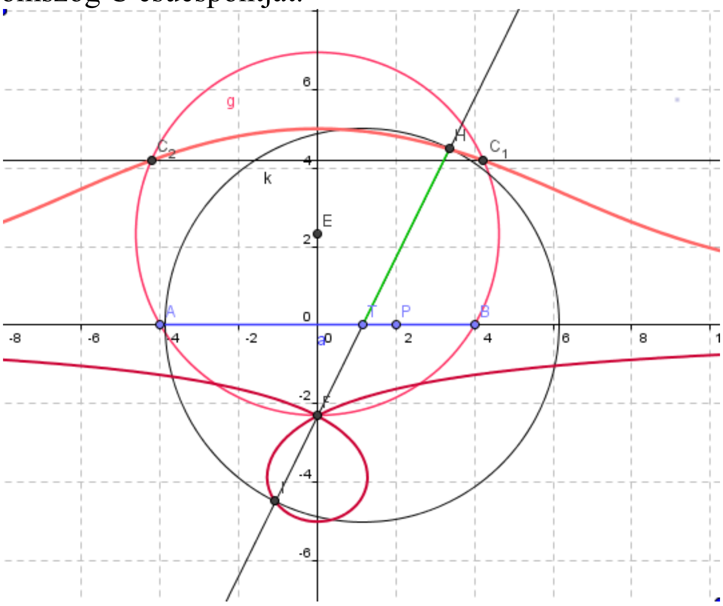


alap: 8 cm, szemközti szög: 60˚, alaphoz tartozó szögfelező: 5 cm

2. Első próbálkozás

Felvesszük az alapot, erre szerkesztjük a látókörívet és megkeressük az 5 cm-es szakasz végpontjának mértani helyét a szögfelező talppontjának alapon való mozgatásával.

AB 8 cm hosszú szakasz a háromszög alapja. Erre szerkesztjük az α=60º-ú látókörívet. Az előbb nem tudtuk, hogy vegyük fel a szögfelezőt, azonban ha meghosszabbítjuk, akkor van egy fix pontja, ahol a látókörív 180º-α íve metszi a szakaszfelező merőlegest, legyen a neve F. Innen indul ki a szögfelező egyenese, mivel a szemközti ívet felezi. Ahol a szögfelező egyenese metszi az AB szakaszt, azt nevezzük T pontnak. Ezt a pontot szabadon mozgatjuk, ezért a koordinátája T=(t,0). Innen felmérjük az egyenesre az 5 cm hosszú szögfelezőt, aminek a másik végpontja legyen H pont. Kíváncsiak vagyunk a H pont mértani helyére, ha a T pontot szabadon mozgatjuk az AB szakaszon. Ennek a mértani helynek és a látókörívnek a metszete adja a háromszög C csúcspontját.



$\overline{AB} = 8$, $\overline{TH} = 5$, α=60º, akkor a kör sugara $R = \frac{8}{\sqrt{3}}$, és az F pont koordinátája $F = (0, \frac{-4}{\sqrt{3}})$

Az $\overrightarrow{FT}=(t,\frac{4}{\sqrt{3}})$ vektor segítségével felírjuk az egyenes egyenletét:

FT: $\frac{4}{\sqrt{3}}x-ty=\frac{4}{\sqrt{3}}t-t\cdot 0$

A T középpontú kör egyenlete:

k: $(x-t)^2+(y-0)^2=5^2$.

A kör és egyenes metszete adja a H pontot. Ha a metszetnél az egyenes egyenletéből kifejezzük a t paramétert – szabad változó – és így helyettesítjük be a kör egyenletébe, akkor megkapjuk a H pont mértani helyének az egyenletét.

FT: $\frac{4}{\sqrt{3}}x-ty=\frac{4}{\sqrt{3}}t$

$$\frac{4}{\sqrt{3}}x=ty+\frac{4}{\sqrt{3}}t$$

$$\frac{4}{\sqrt{3}}x=t\left(y+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\frac{\frac{4}{\sqrt{3}}x}{y+\frac{4}{\sqrt{3}}}=t$$

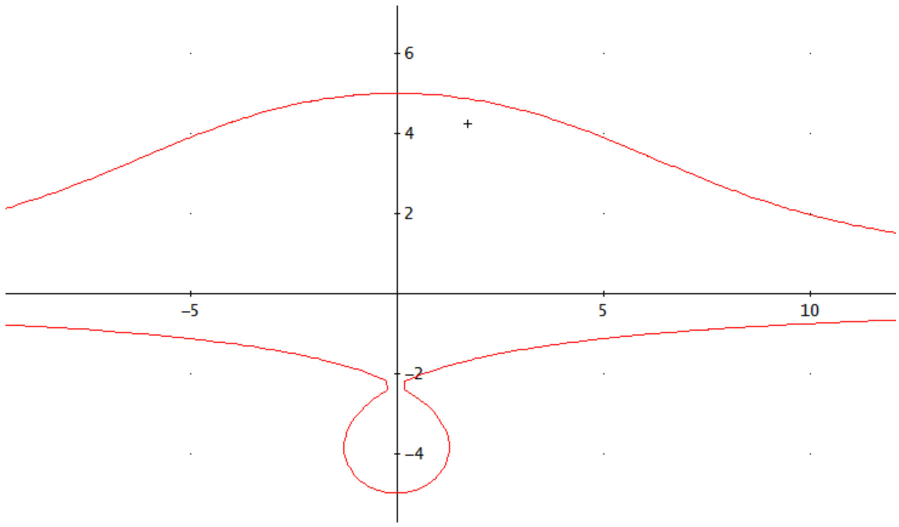
Egyszerűsítve: $\frac{4x}{\sqrt{3}y+4}=t$

k: $(x-t)^2+(y-0)^2=5^2$

A t helyébe behelyettesítve: $\left(x-\frac{4x}{\sqrt{3}y+4}\right)^2+y^2=5^2$

$$\left(\frac{x(\sqrt{3}y+4)-4x}{\sqrt{3}y+4}\right)^2+y^2=5^2$$

Tehát a H pont mozgásának egyenlete: $\left(\frac{x\sqrt{3}y}{\sqrt{3}y+4}\right)^2+y^2=5^2$



Derive6 programmal ábrázolva megegyezik a Geogebra program mértani helyével.

Ezt a mértani helyet kellene elmetszeni a 60°-os látókörívvel. Fejezzük ki az x^2-et és helyettesítsük be a látókör egyenletébe.

$$\left(\frac{x\sqrt{3}y}{\sqrt{3}y+4}\right)^2+y^2=5^2$$

$$3x^2y^2+(3y^2+8\sqrt{3}y+16)y^2=25(3y^2+8\sqrt{3}y+16)$$

$$3x^2y^2=-3y^4-8\sqrt{3}y^3-16y^2+75y^2+200\sqrt{3}y+400$$

$$x^2=\frac{-3y^4-8\sqrt{3}y^3+59y^2+200\sqrt{3}y+400}{3y^2}$$

Látókörív egyenlete:

$$x^2+\left(y-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2=\left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$\frac{-3y^4-8\sqrt{3}y^3+59y^2+200\sqrt{3}y+400}{3y^2}+\left(y-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2=\left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right)^2$$

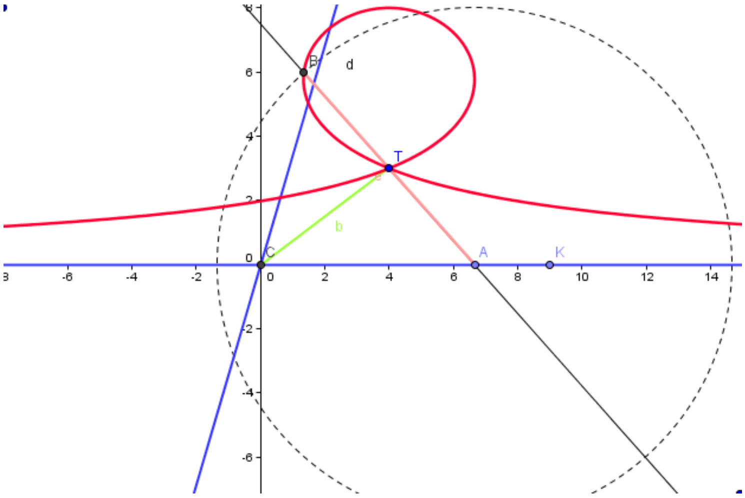
$$\frac{-16\sqrt{3}y^3+75y^2+200\sqrt{3}y+400}{3y^2}=\left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right)^2$$

Harmadfokú egyenletet nem nagyon tudunk szerkeszteni, ezért feladjuk. Ez a megoldási módszer nem jó, ezért másféleképpen kell megközelíteni ezt a problémát.

3. Második próbálkozás

Felvesszük a szöget és a hozzá tartozó szögfelezőt, majd az alapot a szögfelező talppontján keresztül csúsztatjuk és megkeressük a másik végpont mértani helyét.

Az α=60º, ennek a szögfelezőjére mérjük rá az 5 cm-t, talppontja legyen T. Ezen a ponton keresztül megy át a *c* oldal, ami az x tengelyt az A pontban metszi. Ezt a pontot szabadon mozgathatjuk, így a koordinátája (a;0). Az A ponttól az egyenesen felveszünk 8 cm-t, a végpontja legyen N. Ennek a pontnak szeretnénk megtudni a mértani helyét, ha az A pontot szabadon mozgatjuk az x tengelyen. Az *a* oldalnak és az N pont mértani helyének metszete lesz a B csúcs a keresett háromszögünkben.



$\overline{AB}=8$, α=60º, $\overline{BT}=5$, ezért a T pont koordinátája $T\left(4{,}33;\frac{5}{2}\right)$, és $\overrightarrow{AT}\left(a-4{,}33;\frac{5}{2}\right)$

Az AT egyenes egyenletét felírjuk az $\overrightarrow{AT}\left(a-4{,}33;\frac{5}{2}\right)$ vektor alapján:

$$\text{AT: } \frac{5}{2}x-(a-4{,}33)y=\frac{5}{2}a$$

Az A középpontú kör egyenlete:

$$\text{k: } (x-a)^2+y^2=8^2$$

Az AT egyenes és az A középpontú kör metszeteként kapjuk az N pontot. Az *a* paramétert kifejezzük az AT egyenesből, majd behelyettesítjük a kör egyenletébe. Ezáltal megkapjuk az N pont mértani helyét.

$$\text{AT: } \quad \frac{5}{2}x-(a-4{,}33)y=\frac{5}{2}a$$

$$\frac{5}{2}x+4{,}33y=a\left(\frac{5}{2}+y\right)$$

$$\frac{\frac{5}{2}x+4{,}33y}{\frac{5}{2}+y}=a$$

$$\text{k: } (x-a)^2+y^2=8^2$$

Az *a* helyébe behelyettesítve: $$\left(x-\frac{\frac{5}{2}x+4{,}33y}{\frac{5}{2}+y}\right)^2+y^2=8^2$$

Az N pont mértani helyének egyenlete: $\left(\dfrac{xy-4,33y}{\frac{5}{2}+y}\right)^2+y^2=8^2$

Ezután az *a* oldalegyenest metsszük el ezzel a mértani hellyel. Az egyenesből kifejezzük az y-t és behelyettesítjük a mértani hely egyenletébe.

Az *a* oldalegyenes egyenlete: $\sqrt{3}x-y=0$

$$x\sqrt{3}=y$$

Behelyettesítve: $\left(\dfrac{x\left(x\sqrt{3}\right)-4,33\left(x\sqrt{3}\right)}{x\sqrt{3}+\frac{5}{2}}\right)^2+\left(x\sqrt{3}\right)^2=8^2$

$$\left(\dfrac{x^2\sqrt{3}-\frac{15}{2}x}{x\sqrt{3}+\frac{5}{2}}\right)^2+3x=8^2$$

$$\dfrac{3x^4-15\sqrt{3}+\frac{225}{4}x^2}{3x^2+5\sqrt{3}+\frac{25}{4}}+3x=64$$

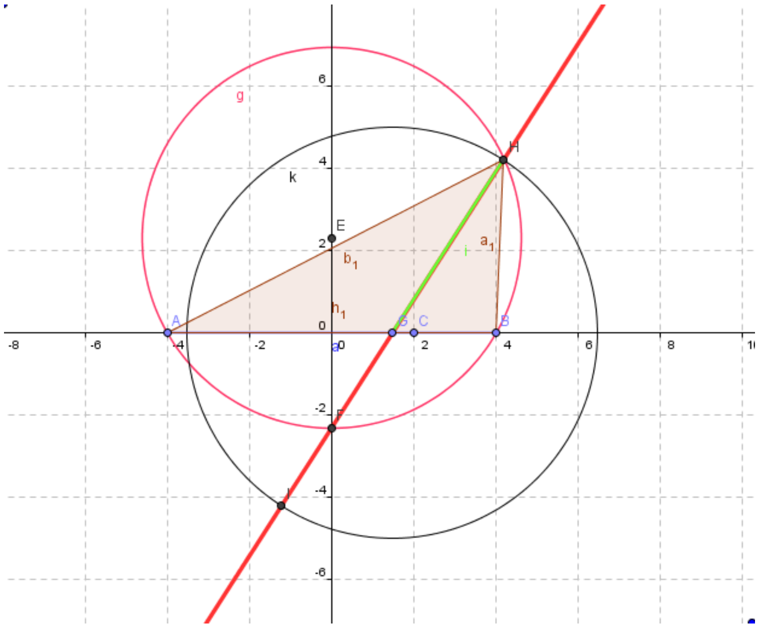
$$3x^4+9x^3-135,75x^2+44,73x-980,23=0$$

Mivel olyan negyedfokú egyenlet jött ki, ami nem hiányos, és nem lehet visszavezetni másodfokú egyenletre, ezért ezt ilyen módon nem lehet megszerkeszteni, tovább kell próbálkozni.

4. Harmadik próbálkozás

Ismét az alapot vesszük fel először, rászerkesztjük a látókörívet, majd a szögfelező meredekségére felírt egyenletet vizsgáljuk szerkeszthetőség szempontjából.

A 8 cm hosszú alapra felvesszük az α=60º-os látókörívet. Tudjuk, hogy a szögfelező átmegy egy fix ponton (ahol a szakaszfelező merőleges elmetszi a látókör 180º-α ívét), legyen ez az F pont, viszont nem tudjuk a szögfelező meredekségét, ezért ezt jelöljük *a*-val. Ha ezt az *a* meredekségű egyenest elmetsszük az alappal, kapunk egy G pontot. A szögfelezőt elmetsszük a látókörívvel is, így kapjuk a H pontot. Azt vizsgáljuk meg, hogy a G és H pont közötti távolság mikor lesz 5 cm.



$\overline{AB}=8$, α=60º, a látókörív sugara $R=\dfrac{8}{\sqrt{3}}$ és az F pont koordinátája $F=(0,\dfrac{-4}{\sqrt{3}})$

Az F ponton átmenő *a* meredekségű egyenes egyenlete:

$$y=ax-\frac{4}{\sqrt{3}}$$

Ezt az egyenest elmetsszük az *x* tengellyel:

$$0=ax-\frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$x=\frac{4}{a\sqrt{3}}$$

Tehát a G pont koordinátája: $G\left(\dfrac{4}{a\sqrt{3}};0\right)$

A látókörív egyenlete: $x^2+\left(y-\dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)^2=\left(\dfrac{8}{\sqrt{3}}\right)^2$

A szögfelező egyenesét elmetszve a látókörívvel:

$$x^2+\left(ax-\frac{4}{\sqrt{3}}-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2=\left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$x^2+\left(ax-\frac{8}{\sqrt{3}}\right)^2=\left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$\left(a^2+1\right)x^2-\frac{16a}{\sqrt{3}}x=0$$

x-re alkalmazva a megoldóképletet kapunk két koordinátát, amiből az egyik a már eddig is ismert F pont, a másik pedig a H pont.

A H pont koordinátája: $H\left(\dfrac{16a}{(a^2+1)\sqrt{3}};\dfrac{16a^2}{(a^2+1)\sqrt{3}}-\dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)$

Megvizsgáljuk, hogy a G és a H pont közötti távolság mikor lesz 5 cm.

$$\overrightarrow{GH}\left(\frac{16a}{(a^2+1)\sqrt{3}}-\frac{4}{a\sqrt{3}};\frac{16a^2}{(a^2+1)\sqrt{3}}-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\sqrt{\left(\frac{16a}{(a^2+1)\sqrt{3}}-\frac{4}{a\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{16a^2}{(a^2+1)\sqrt{3}}-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2}=5$$

Első ránézésre ez az egyenlet sem nagyon barátságos, látható, hogy ebből egy teljes negyedfokú egyenlet készül kialakulni. Viszont ha egy kicsivel jobban megvizsgáljuk, azt vesszük észre, hogy az egyenlet szerkezete ilyen alakra hozható ki: $\left(\frac{k}{a}\right)^2+k^2=25$, ahol a $k=\left(\frac{16a^2}{(a^2+1)\sqrt{3}}-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$. Feltehetnénk a kérdést, hogy most ezzel a lépéssel vajon jobb lett-e nekünk, mert a negyedfok még mindig nem szeretne eltűnni onnan. Érezzük viszont, hogy már nagyon közel járunk, nem szabad feladni. Megnézzük, mi történik, ha kiemelünk k^2-et az egyenletből:

$$\left(\frac{16a^2}{(a^2+1)\sqrt{3}}-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2\left(\frac{1}{a^2}+1\right)=25$$

Hozzuk közös nevezőre a tagok belsejét:

$$\left(\frac{16a^2-4(a^2+1)}{(a^2+1)\sqrt{3}}\right)^2\left(\frac{1+a^2}{a^2}\right)=25$$

$$\frac{(12a^2-4)^2}{(a^2+1)^2 3}\cdot\frac{1+a^2}{a^2}=25$$

$$\frac{(12a^2-4)^2}{a^2(a^2+1)3}=25$$

$$(12a^2-4)^2=25a^2(a^2+1)3$$

$$(144-25\cdot 3)a^4-(96+25\cdot 3)a^2+16=0$$

Mivel egy hiányos negyedfokú egyenletet kaptunk, behelyettesítő módszerrel egy másodfokú egyenletet kapunk.

Legyen $a^2=n$

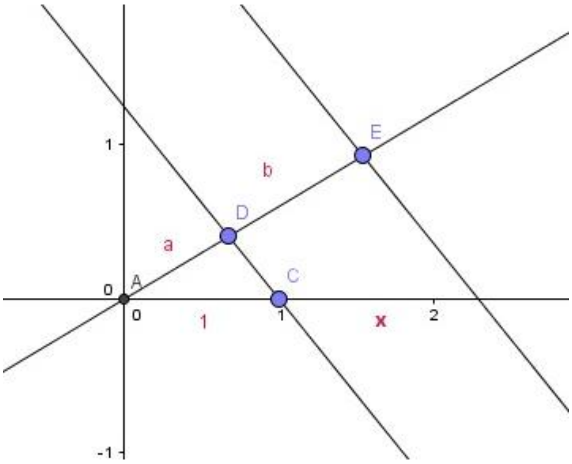
$$(144-25\cdot 3)n^2-(96+25\cdot 3)n+16=0$$

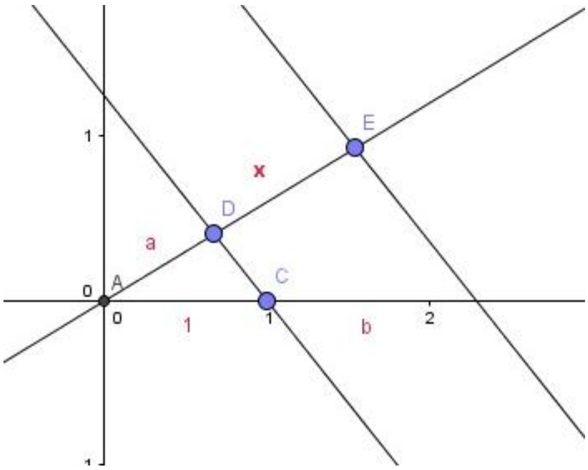
Másodfokú egyenlet gyökeit meg tudjuk szerkeszteni, ezért a háromszög megszerkeszthető. n-re alkalmazva a megoldóképletet:

$$n_{1;2}=\frac{96+25\cdot 3\pm\sqrt{\left(-(96+25\cdot 3)\right)^2-64(144-25\cdot 3)}}{2(144-25\cdot 3)}$$

n_1= 0.09739483647 , n_2= 2.380866033, ebből az n_2 a jó. **Így a meredekség a=±1.543005519**

Alapszerkesztésként két szakasz szorzatát és hányadosát, a párhuzamos szelők tételével meg tudunk szerkeszteni.





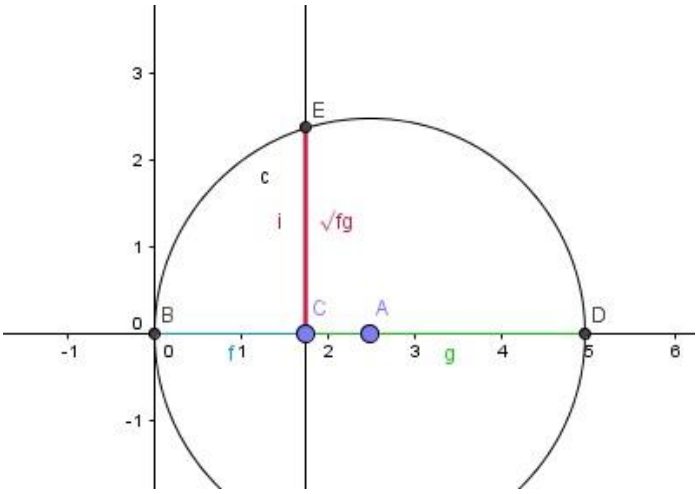
$$\frac{a}{1}=\frac{b}{x}$$

$$x=\frac{b}{a}$$

$$\frac{x}{b}=\frac{a}{1}$$

$$x=ab$$

Gyököt a magasság-tétel felhasználásával szerkesztünk meg.



Így megkaptuk a szögfelező meredekségét, amit a következőképp ábrázolunk: az F pontból az x tengelyen pozitív irányban mérünk egy egységet, majd innen y tengelyen pozitív vagy negatív irányban a meredekséget. Az itt kapott pontot összekötjük az F ponttal, meghosszabbítjuk, és ahol elmetszi a látókörívet, ott kapjuk meg a háromszög harmadik csúcsát. Ezt összekötjük az alap két végpontjával, és megkapjuk a kért háromszöget.

5. Konklúzió

A feladat tetszőleges szögmérettel is megoldható, ebben az esetben a látókörív sugara nem lenne biztosan szépen felírható (az előző feladatban a sin60º miatt lett ilyen), hanem sinα-val kellene végigszámolni, amit a végén ugyan úgy meg tudunk szerkeszteni.

Utólag, ha jobban megvizsgáljuk az első megoldási kísérletet, feltűnik, hogy a harmadfokú egyenlet egyik gyökét már meg tudjuk állapítani. A három metszéspont közül az egyik a már ismert F pont. Ha polinom osztást alkalmazunk a harmadfokú egyenletre, akkor kapunk egy másodfokú egyenletet, amit pedig már tudtunk volna szerkeszteni.

Ebből a példából is látszik, hogy egy egyszerűnek tűnő feladat mennyire nem az, amilyennek látszik. Már amikor kezdi azt hinni az ember, hogy megtalálta azt a fogást, amivel el lehet indítani a megoldást jó irányba, akkor a végeredmény közbeszól és egy újabb zsákutcába érkezünk. Ezeken a pontokon át kell lendülni, hogy aztán tovább lehessen haladni a megoldás felé. A dolgozat megírása során sok újdonságot tanultam és alkalmaztam. Megismertem a GeoGebra használatát, amivel gyorsabban és pontosabban tudtam ábrázolni a szerkesztéseket, és akkor is nagyon hasznosnak bizonyult, amikor egy pontnak nem volt fix helye, és mozgatni kellett azt. A tavaly tanult koordináta-geometria nélkül sem sikerült volna ilyen módon megoldani ezt a matematikai nehézséget. Sokszor alkalmaztunk paraméteres módszert a különböző példáknál, és itt is látszik, hogy gyakran (viszonylag) könnyen kivitelezhetővé teszi, hogy az eredményt megkapjuk. Örülök, hogy mindezek segítségével és felkészítő tanárom támogatásával sikerült választ adni a feladatsorba véletlenül bekerült, látszólag nehezen/egyáltalán nem megoldható feladatra. A dolgozat megírása segített abban, hogy a feladat megoldási módszerei között észrevegyem a járható utat, és kitartó munkával a keresett célt is elérhetem.

$n_{1;2} = \dfrac{1.5b^2 + c^2 \cdot 3 \pm \sqrt{\left(-\left(1.5b^2 + c^2 \cdot 3\right)\right)^2 - 4\dfrac{b^2}{4}\left(2.25b^2 - c^2 \cdot 3\right)}}{2(2.25b^2 - c^2 \cdot 3)}$, ahol b az alap, c a szögfelező hossza,és α=60°-os. meredekség $a = \sqrt{n_2}$