Békéscsabai Belvárosi Általános Iskola és Gimnázium

Vajon Euler is így csinálta?

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{6^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{8^6}+\ldots\ldots\ldots=\frac{\pi^6}{945}$$

Írta: Erdei Tamás

Felkészítő tanár: Méri Károly

2020.

Tartalom

Bevezetés

A matematika a legszerteágazóbb tudomány. Minden erre épül. Ott van a mindennapjainkban. Mindenkinek szüksége van rá, ha csak a legalacsonyabb szinten is. *„Az égben Isten vezet egy Nagy Könyvet, amelyben minden matematikai probléma elegáns megoldása megtalálható.”* (Erdős Pál) Ezt az idézetet matematika órán hallottam. A tanár úr azt mondta, hogy a legnagyobb matematikusok megpillanthatják egy oldalát. Ezen különleges emberek közé tartozott Leonhard Euler is. Csodálatos dolgokat művelt a matematikában. A dolgozatomban meg szeretnék oldani egy olyan problémát, amit Euler már egyszer megoldott. Vajon nekem is sikerül?

A dolgozatom három fő részből fog állni. Először egyszerűbb sorozatokkal fogok foglalkozni. A második egység a Basel-probléma megoldása lesz. Ez fontos szerepet fog játszani a harmadik részben, amiben az első egység sorozataihoz hasonló végtelen, többtényezős sorozatokkal fogok foglalkozni. Ezeknek a megoldásait megpróbálom minél érthetőbb módon átadni. Itt ismét Euler problémája lenne a cél, mivel Ő képes volt a páros kitevőjű hatványok reciprokainak összegét kiszámolni. A dolgozatomnak is ez a fő célja.

Mikor a számtani sorozatokkal foglalkoztunk, akkor találkoztunk a következő feladattal.

$N=1\cdot2 + 1\cdot3 + 1\cdot4 +\ldots+ 1\cdot10 + 2\cdot3 + 2\cdot4 + 2\cdot5 +\ldots+ 2\cdot10 + 3\cdot4 + 3\cdot5 + 3\cdot6 +\ldots+ 8\cdot9 + 8\cdot10 + 9\cdot10$

Kerestem benne a számtani sorozatot, de csak egyre rövidebb és növekvő differenciájút találtam benne. Mivel lusta vagyok beütni a számológépbe, inkább megpróbálok kitalálni rá egy frappáns megoldást.

A kéttényezős megoldása

A szorzatokat fel tudom írni háromszög alakban. Majd kiegészítem négyzetté. Minden sor egy számtani sorozat. Soronként mindig nő eggyel a tagok közti különbség, de legalább a tagok száma azonos. Ebben a felírásban a sorokban lévő a tagok összege érdekel.

1·1	1·2	1·3	1·4	1·5	1·6	1·7	1·8	1·9	1·10
2·1	2·2	2·3	2·4	2·5	2·6	2·7	2·8	2·9	2·10
3·1	3·2	3·3	3·4	3·5	3·6	3·7	3·8	3·9	3·10
4·1	4·2	4·3	4·4	4·5	4·6	4·7	4·8	4·9	4·10
5·1	5·2	5·3	5·4	5·5	5·6	5·7	5·8	5·9	5·10
6·1	6·2	6·3	6·4	6·5	6·6	6·7	6·8	6·9	6·10
7·1	7·2	7·3	7·4	7·5	7·6	7·7	7·8	7·9	7·10
8·1	8·2	8·3	8·4	8·5	8·6	8·7	8·8	8·9	8·10
9·1	9·2	9·3	9·4	9·5	9·6	9·7	9·8	9·9	9·10
10·1	10·2	10·3	10·4	10·5	10·6	10·7	10·8	10·9	10·10

Mint látható a négyzetszámokon kívül az eredeti feladat kétszer szerepel. Ezért a dolgom annyi, hogy kiszámolom az teljes összegét, ami nem lesz nehéz, ha Gauss-módszert használom.

1·1 + 1·2 + 1·3 + 1·4 + 1·5 + 1·6 + 1·7 + 1·8 + 1·9 + 1·10 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 =

=(10+1)·0,5·10 =11·5 =55

Mint látható, ha többi sorból kiemelem a szorzó tényezőt, akkor az előbbi sort kapom. Így a végeredmény már egyszerű.

1·55	6·55
2·55	7·55
3·55	8·55
4·55	9·55
5·55	10·55

<u>*∑n=3025*</u>

Ha megvan az összeg, ki kell vonnom a számok négyzeteinek összegét 1-től 10-ig. Mivel ismerjük a négyzetszámok összegképletét, ezt használva.A különbséget pedig elosztanom 2-vel és már meg is kaptam az N-t.

$$n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{10(10+1)(20+1)}{6} = \frac{10*11*21}{6} = 385$$

$$2N = 3025 - 385$$

$$2N = 2640$$

$$N = 1320$$

A feladat kiszámításának teljes folyamatát ebben a formában láthatjuk.

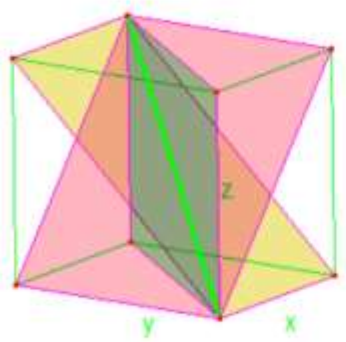
$$\frac{55^2 - \frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}}{2!} = 1320$$

<u>Tehát az összeg 1320 lett.</u>

Háromtényezős összeg

Felbuzdulva az ötleten, megpróbálom a háromtényezős szorzat kiszámítását. Ez már $\binom{10}{3}=120$ db háromtényezős tag összegét jelenti. Ezt egy kockává egészítem ki.

N=1·2·3 + 1·2·4 + 1·2·5 +...+ 1·2·10 + 1·3·4 + 1·3·5 + 1·3·6 +...+ 1·3·10 + 2·3·4 + 2·3·5 + 2·3·6 +...+ 7·8·9 + 7·8·10 + 7·9·10 + 7·9·10 + 8·9·10



Ezeket a lap- és testátlókat kell kivonnom. Itt használom a logikai szitát, de nem úgy mint a halmazoknál, mert itt azoknak amikben ismétlés van teljesen ki kell esni.

$$1^3+2^3+3^3+4^3+.....+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

összes	két egyforma	három egyforma
$55^3 \cdot 166375$	$55 \cdot 385$	55^2
$+166735$	$-\binom{3}{2}\cdot 55\cdot 385$	$+2*55^2$

$$1\cdot 166375-3\cdot 55\cdot 385+2\cdot 55^2=108900$$

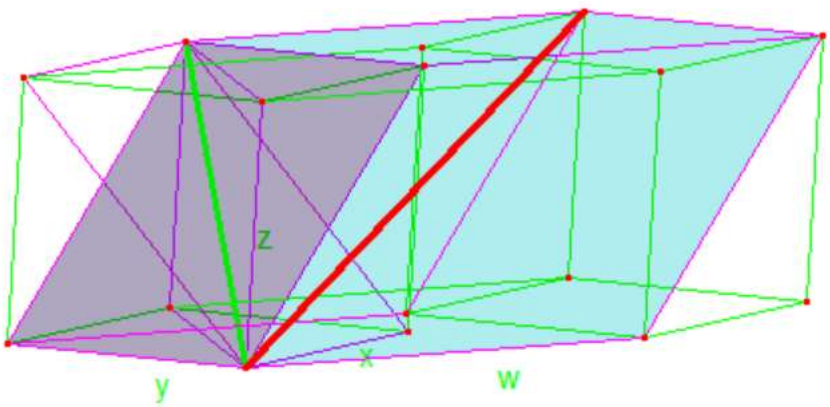
Azonban ebben még vannak egyforma szorzatok – mint egy variációban de, nekünk csak egyszer kell és a sorrend nem számít, mint egy kombinációban -, ezért elosztom 3!-sal, mert a három lapátló 6 részre vágja kockát. A számítás teljes folyamata :

$$\frac{1\cdot 55^3-3\cdot 55\cdot 385+2\cdot 55^2}{3!}=\frac{108900}{3!}=18150$$

<u>Tehát az összeg 18150 lett.</u>

Négytényezős összeg

Tovább próbálkozom, már a négytényezős szorzat kiszámítása is érdekel. Ez már $\binom{10}{4} = 210$ db négytényezős tag összegét jelenti. Ezt egy négydimenziós kockává egészítem ki.



Itt ismét használom a logikai szitát. Elég nehéz volt átgondolni, hogy mit hányszor kell kivonni és visszaadni, mert itt bizonyos részeknek teljesen ki kell esni. Ebben segít az alábbi táblázat.

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \ldots.. + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

összes	két egyforma	három egyforma	két-két egyforma	négy egyforma
$55^4 = 91506625$	$55^2 \cdot 385$	$55 \cdot 55^2$	385^2	25333
1	$\binom{4}{2} = 6$	$\binom{4}{3} = 4 \to 8$	$\frac{\binom{4}{2}}{2} = 3$	1
+1	-6	+8	+3	-6

$$\frac{1 \cdot 55^4 - 6 \cdot 55^2 \cdot 385 + 8 \cdot 55^3 + 3 \cdot 385^2 - 6 \cdot 25333}{4!} = \frac{9150625 - 6987750 + 1331000 + 444675 - 151998}{4!} =$$

$$= \frac{10756152}{4!} = 157772$$

<u>Tehát az összeg 157772 lett.</u>

Részösszegzés

Az összes képlet ugyanarra az ötletre épül. A térbeli elképzelés sokat segít, ezért ahány tényezősek a szorzatok az összeadásban, annyi dimenziós kockává egészíthetem ki őket. Ilyenkor az első dolgom, hogy kiszámolom a teljes összeget. Ezután úgy vonom ki és adom vissza az olyan szorzatokat, amikben egy szorzótényező többször szerepel, hogy a végén az ilyenekből egy se legyen. A végén pedig elosztom annyival, amennyi részre osztják az átlók, hogy mindegyik tényezős tag csak egyszer szerepeljen. Minden egyes rész kiszámításánál szükségünk volt a hatványok összegét kiszámító képletekre.

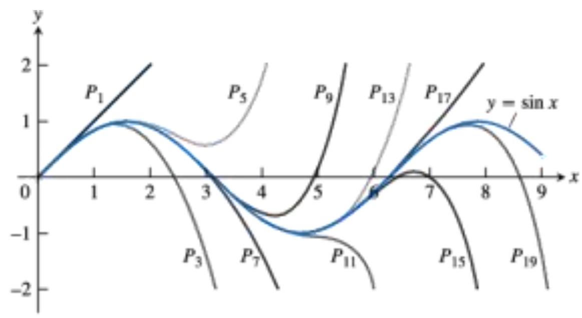
Basel-probléma

Alkalmazni szeretném végtelen tényezősre is, és abból szeretnék új eredményeket kapni. Ehhez tenni kell előbb egy kisebb kitérőt. Meg kell tudnom a számok négyzeteinek reciprokainak az összegét, ez pedig nem más, mint a Basel-probléma, melynek pontos értékét Euler találta meg először.

Basel-probléma:

$$N=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots$$

$$N=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots$$



Ez a sin(x)-es Taylor-sor, amire majd később szükségem lesz.

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{11}}{11!}\ldots..$$

Euler egy egyszerű függvényre alapozta számítását:

Én a másodfokú függvénynél, és egyenletnél tanultam a következő kapcsolatról. Az egyenlet megoldása, a függvény zérushelye, a gyöktényezős alak és azok kapcsolatairól.

$$f\left(x\right)=x^2+5x+6=\left(x+2\right)\left(x+3\right)=A(1+\frac{x}{+2})(1+\frac{x}{+3})$$

Az $f(x)=0$ csak akkor igaz, ha $x_1=-2$, és $x_2=-3$.

A sin(x) függvény periodikus és csak akkor nulla, ha $x=0,\ \pm\pi,\ \pm2\pi,\ \pm3\pi,\ \pm4\pi$ …….

Tehát:

$$\sin\left(x\right)=A\left(x-0\right)\left(x-\pi\right)\left(x+\pi\right)\left(x-2\pi\right)\left(x+2\pi\right)\ldots$$

$$\sin(x) = Ax(x^2-\pi^2)(x^2-4\pi^2)(x^2-9\pi^2)(x^2-16\pi^2)...$$

Az előző ötletre alapozva átírom más alakba a szorzótényezőket.

$$\sin(x) = Ax(1-\frac{x^2}{\pi^2})(1-\frac{x^2}{4\pi^2})(1-\frac{x^2}{9\pi^2})(1-\frac{x^2}{16\pi^2})...$$

Az x=0 megoldástól eltekintünk, így ha elosztjuk x-el, nem veszítünk gyököt.

$$\frac{\sin(x)}{x} = A(1-\frac{x^2}{\pi^2})(1-\frac{x^2}{4\pi^2})(1-\frac{x^2}{9\pi^2})(1-\frac{x^2}{16\pi^2})...$$

Az A elhanyagolható, mert nem szeretném ábrázolni.

$$\frac{\sin(x)}{x} = (1-\frac{x^2}{\pi^2})(1-\frac{x^2}{4\pi^2})(1-\frac{x^2}{9\pi^2})(1-\frac{x^2}{16\pi^2})...$$

Amikor ezt a végtelen szorzatot kiszámítjuk, akkor minden tagot minden taggal összeszorzunk. Amikor mindegyik tényezőnél egyszer az x^2-es részt választva a többiből az 1-eseket, akkor a szorzat a Basel –problémához vezet, mert csak az x^2-es tag együtthatóit gyűjtjük össze a polinomból.

A Taylor-sort is osztom x-el.

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-...$$

Most elkezdem elvégezni a szorzásokat.

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1-\frac{x^2}{\pi^2}-\frac{x^2}{4\pi^2}-\frac{x^2}{9\pi^2}-\frac{x^2}{16\pi^2}-\frac{x^2}{25\pi^2}-...$$

Mint látszik, ki tudom emelni az x^2-et, az x^4-ent és így tovább.

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1-x^2(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\frac{1}{16\pi^2}+...)+x^4(...)-x^6(...)...$$

Nekem most csak az x^2-esre lesz szükségem. A többi most nem fontos a probléma szempontjából, mivel két polinom akkor egyenlő, ha megfelelő együtthatói megegyenek.

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-...$$

Az x-el osztott Taylor-sor második tagja megegyezik az előző egyenlet második tagjával. Tehát, ha mindkettőt osztom x^2-tel, akkor az alábbi egyenlet jön létre.

Innen már egyszerű.

$$-\frac{1}{3!}=-\frac{1}{6}=-(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\frac{1}{16\pi^2}+...)$$

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{\pi^2}(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+...)$$

Az egyenlet jobb oldalán láthatóvá vált a Basel-probléma. Az egyenletet szorzom π^2-tel és megkapom a Basel-probléma pontos értékét. ζ(2) tehát:

$$\boxed{\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}...}$$

Olvastam, hogy Euler könnyedén meghatározta a páros kitevős összegek értékét. Most szeretném a bevezetőben alkalmazott technikákat alkalmazni arra, hogy én is kiszámoljam a ζ(4), ζ(6), ζ(8) értékeit.

Kéttényezős végtelen

A kéttényezős végtelen sorozatot hasonlóan kell megoldani az alap feladathoz:

$$\frac{\sin(x)}{x}=(1-\frac{x^2}{\pi^2})(1-\frac{x^2}{4\pi^2})(1-\frac{x^2}{9\pi^2})(1-\frac{x^2}{16\pi^2})...$$

$$\frac{\sin(x)}{x}=1-x^2(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\frac{1}{16\pi^2}+...)+x^4(\frac{1}{\pi^2\cdot 4\pi^2}+\frac{1}{\pi^2\cdot 9\pi^2}+\frac{1}{\pi^2\cdot 16\pi^2}+...+\frac{1}{4\pi^2\cdot 9\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2\cdot 16\pi^2}+....)$$
$$-x^6(\frac{1}{\pi^2\cdot 4\pi^2\cdot 9\pi^2}+\frac{1}{\pi^2\cdot 4\pi^2\cdot 16\pi^2}+\frac{1}{\pi^2\cdot 4\pi^2\cdot 25\pi^2}...)...$$

Ha a végtelen szorzatból mindig két tényezőt választok, amiből az x^2-eseket a többiből az 1-eseket, akkor az x^4-es tag együtthatóit számolom ki a polinomból. Az x^4-es tag együtthatói itt, mint az eredeti sorozatos feladatban a kéttényezős tagokból vett végtelen összeg. ***Azonban mi nem is erre vagyunk kíváncsiak, csak eszköznek használjuk a célunk eléréséhez. Ez nem más, mint zölddel jelölt rész, vagyis a ζ(4) értékének meghatározása.***

szorzó-tényezők	$\frac{x^2}{\pi^2}$	$\frac{x^2}{4\pi^2}$	$\frac{x^2}{9\pi^2}$	$\frac{x^2}{16\pi^2}$	$(\ldots)$
$\frac{x^2}{\pi^2}$	$\frac{x^2}{\pi^2}\cdot\frac{x^2}{\pi^2}$	$\frac{x^2}{\pi^2}\cdot\frac{x^2}{4\pi^2}$	$\frac{x^2}{\pi^2}\cdot\frac{x^2}{9\pi^2}$	$\frac{x^2}{\pi^2}\cdot\frac{x^2}{16\pi^2}$	$(\ldots)$
$\frac{x^2}{4\pi^2}$	$\frac{x^2}{4\pi^2}\cdot\frac{x^2}{\pi^2}$	$\frac{x^2}{4\pi^2}\cdot\frac{x^2}{4\pi^2}$	$\frac{x^2}{4\pi^2}\cdot\frac{x^2}{9\pi^2}$	$\frac{x^2}{4\pi^2}\cdot\frac{x^2}{16\pi^2}$	$(\ldots)$
$\frac{x^2}{9\pi^2}$	$\frac{x^2}{9\pi^2}\cdot\frac{x^2}{\pi^2}$	$\frac{x^2}{9\pi^2}\cdot\frac{x^2}{4\pi^2}$	$\frac{x^2}{9\pi^2}\cdot\frac{x^2}{9\pi^2}$	$\frac{x^2}{9\pi^2}\cdot\frac{x^2}{16\pi^2}$	$(\ldots)$
$\frac{x^2}{16\pi^2}$	$\frac{x^2}{16\pi^2}\cdot\frac{x^2}{\pi^2}$	$\frac{x^2}{16\pi^2}\cdot\frac{x^2}{4\pi^2}$	$\frac{x^2}{16\pi^2}\cdot\frac{x^2}{9\pi^2}$	$\frac{x^2}{16\pi^2}\cdot\frac{x^2}{16\pi^2}$	$(\ldots)$
$(\ldots)$	$(\ldots)$	$(\ldots)$	$(\ldots)$	$(\ldots)$	$(\ldots)$

Ez az általánosított képlet az első feladat alapján:

$$\frac{55^2-\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}}{2!}=1320$$

$$\frac{\left(\sum n\right)^2-\frac{n\cdot(n+1)(2n+1)}{6}}{2!}=N$$

Csak ezúttal nem az eredmény az ismeretlen. A végeredményt az ***N***-et a Taylor-sorból tudom, így a számok négyzeteinek összege végtelenig lesz az ismeretlen. Ezt keresem. Ami jelen pillanatban a x^4 –es tagot jelenti. A négyzetes azt jelenti, hogy önmagával nem párosíthatom az x^2-est, ezért kell kivonni. Viszont pont ezt az értéket keresem. Jelöljük az értékét d-vel.

$$\frac{\sin(x)}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-\ldots$$

$$\frac{\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2-d}{2!}=\frac{\pi^4}{5!}$$ Ez egy lineáris egyenlet ***d***-re. A ***d*** a táblázatom zöld celláinak összegét jelenti.

$$\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2-d=2\left(\frac{\pi^4}{5!}\right)$$

$$\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2-2\left(\frac{\pi^4}{5!}\right)=d$$

$$1{,}082323=d$$

$$\boxed{\frac{\pi^4}{90}=d=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\ldots}$$

<u>A ***d*** értéke $\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$</u>

Háromtényezős végtelen

Ezt az alapfeladat háromtényezős változatához hasonlóan kell megoldani. Képlet:

$$\frac{\left(\sum n\right)^3 - 3\cdot\sum n\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2d}{3!} = N$$

Ez a szerkezet a háromtényezősre (10-ig) hasonlít.

Az előbb már megtudtam a négyzetes összeget, ezért itt a számok köbeinek összege az ismeretlenem. A végeredményt megint az ***N***-et a Taylor-sorból tudom.

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \ldots$$

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - x^2\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \ldots\right) + x^4\left(\frac{1}{\pi^2\cdot 4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2\cdot 9\pi^2} + \frac{1}{\pi^2\cdot 16\pi^2} + \ldots + \frac{1}{4\pi^2\cdot 9\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2\cdot 16\pi^2} + \ldots.\right)$$
$$-x^6\left(\frac{1}{\pi^2\cdot 4\pi^2\cdot 9\pi^2} + \frac{1}{\pi^2\cdot 4\pi^2\cdot 16\pi^2} + \frac{1}{\pi^2\cdot 4\pi^2\cdot 25\pi^2}\ldots\right)\ldots$$

$$\frac{\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^3 - 3\cdot\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{\pi^4}{90} + 2d}{3!} = \frac{\pi^6}{7!}$$

$$\frac{\frac{\pi^6}{216} - 3\cdot\frac{\pi^6}{540} + 2d}{6} = \frac{\pi^6}{7!}$$

$$\frac{\pi^6}{216} - 3\cdot\frac{\pi^6}{540} + 2d = \frac{\pi^6}{840}$$

$$2d = \frac{\pi^6}{840} - \frac{\pi^6}{216} + 3\frac{\pi^6}{540}$$

$$2d = 384\frac{\pi^6}{181440}$$

$$d = \frac{\pi^6}{945}$$

$$\boxed{\frac{\pi^6}{945} = d = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \ldots}$$

A ***d*** értéke $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$

Négytényezős végtelen

Az előbbiekhez hasonlóan kell ezt is megoldani. Megint csak az ismeretlenem változik. Most a számok negyedik hatványainak összegét nem ismerem. Az eredmény szintén a Taylor-sor része.

$$\frac{\left(\sum n\right)^4 - 6\cdot\left(\sum n^2\right)\cdot\left(\sum n\right)^2 + 8\cdot\left(\sum n^3\right)\cdot\left(\sum n\right) + 3\cdot\left(\sum n^2\right)^2 - 6d}{4!} = N$$

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \ldots$$

$$\frac{\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^4 - 6\frac{\pi^4}{90}\cdot\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2 + 8\frac{\pi^6}{945}\cdot\frac{\pi^2}{6} + 3\frac{\pi^8}{90^2} - 6d}{4!} = \frac{\pi^8}{9!}$$

$$\frac{\pi^8}{1296} - 6\frac{\pi^8}{3240} + 8\frac{\pi^8}{5670} + 3\frac{\pi^8}{8100} - 6d = 24\frac{\pi^8}{9!}$$

$$\frac{\pi^8}{1296} - 6\frac{\pi^8}{3240} + 8\frac{\pi^8}{5670} + 3\frac{\pi^8}{8100} - 24\frac{\pi^8}{362880} = 6d$$

$$\frac{1152}{5}\cdot\frac{\pi^8}{9!} = 6d$$

$$\frac{\pi^8}{1575} = 6d$$

$$\boxed{\frac{\pi^8}{9450} = d = 1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \ldots}$$

A ***d*** értéke $\zeta(8) = \dfrac{\pi^8}{9450}$

Befejezés

Most, hogy ezeket kiszámoltam, mehetnék tovább, de azok már számomra túl bonyolultak lennének. Euler lehet, hogy így csinálta, és ha így van, akkor már nekem is sikerült.

Kicsit utána jártam Eulernek és kiderült, hogy a végtelenes sorozatok végeredményei megegyeznek a $\zeta(4)$, $\zeta(6)$, $\zeta(8)$ függvényekkel, mint azt fentebb is jelöltem. Tudom, hogy a hatványösszegek képleteivel Jacob Bernoulli foglalkozott, és az róla elnevezett Bernoulli-számokkal ezket az összegképleteket fel lehet írni. Euler pedig belátta, hogy a $\zeta(\ )$ függvény értékeinek előállításában is szerepelnek ezek a számok. Sikerült találnom egy egyszerűnek nevezhető módszert, amivel néhány páros $\zeta(\ )$ értéket kiszámolhattam.

Mégis mennyire csodálatos a matematika, hogy egy olyan egyszerű sorozatos feladatból, mint az első, el lehet jutni egy ilyen távoli problémához, mint a Riemann-féle $\zeta(\ )$ függvény. Remélem, hogy egyszer én is megpillanthatom akár csak egy sorát annak a *Nagy Könyvnek*.

Felhasznált források

[1] EULER SOLVES THE BASEL PROBLEM: https://www.youtube.com/watch?v=NmSBnOaAjjQ

[2] GINGYIKIN SZEMJON GRIGORJEVICS: Történetek fizikusokról és matematikusokról

[3] NÉMETH JÓZSEF, Előadások a végtelen sorokról – Szeged: SZTE Bolyai Intézet, 2002. (Polygon Könyvtár)

[4] Nyist Milán Konor: Kis Ötletek Nagy Matematikusoktól – Projectdolgozat, Békéscsabai Belvárosi Általános Iskola és Gimnázium

Függelék

Összegek:

1	1	1	1
2	4	8	16
3	9	27	81
4	16	64	256
5	25	125	625
6	36	216	1296
7	49	343	2401
8	64	512	4096
9	81	729	6561
10	100	1000	10000
55	385	3025	25333

Képletek:

$1+2+3+4+.....+n=\frac{n(n+1)}{2}$	$1^2+2^2+3^2+4^2+.....+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$1^3+2^3+3^3+4^3+.....+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$	$1^4+2^4+3^4+4^4+.....+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

Logikai szita a négydimenziónál.

		mind	kettő egyf.	három egyf.	kettő-kettő	négy egyf.
	mennyi van benne		**6**	**4**	**3**	**1**
1.	mennyit vonok ki		-6	-12	-6	-6
2.			385	8		8
3.				3025	3	3
4.					385	-6
	értéke	55^4	=-6*552*385	=8*55*3025	+3*385^2	=-6*25333
						25333
			6-6	4-12+8	3-6+3	1-6+8+3-6
			0	0	0	0

$$\frac{\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^4-6\frac{\pi^4}{90}\cdot\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2+8\frac{\pi^6}{945}\cdot\frac{\pi^2}{6}+3\frac{\pi^8}{90^2}-6d}{4!}=\frac{\pi^8}{9!}$$

Mindig a sárga mezőben lévő értékekkel dolgozok, és a többi a következménye, ahogy a többire hat. Ezek azok amik vele egy sorban vanak. Összesen úgy hogy mindig nulla legyen, mint alul azt az érték mutatja.