1. feladat ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_1 ford_I IIkat_1 fel$)

Bizonyítsuk be, hogy ha az *a, b, c* valós számokra teljesül az

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$

összefüggés, akkor

$$\frac{1}{a^{1001}}+\frac{1}{b^{1001}}+\frac{1}{c^{1001}}=\frac{1}{a^{1001}+b^{1001}+c^{1001}}.$$

1. megoldás ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_1 ford_I IIkat_1 fel_1 mego$)

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$

$$(a+b+c)(ac+ab+bc)=abc$$

Kibontjuk

$$\boldsymbol{3abc} + a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b = \boldsymbol{abc}$$

Szorzattá alakítjuk

$$(a+b)(a+c)(b+c)=0$$

A szorzat akkor 0, ha a valamelyik tényezője 0. Legyen ez az (a+b)

$$a=-b$$

$$\frac{1}{a^{2001}}+\frac{1}{b^{2001}}+\frac{1}{c^{2001}}=\frac{1}{a^{2001}+b^{2001}+c^{2001}}$$

Mert a^{2001}**=**$-b^{2001}$**, tehát ebből azonosságot kapunk.**

2. feladat ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_1 ford_I IIkat_1 fel$)

Let a**,** b**,** c **be real numbers such that** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$**. Prove that**

$$\frac{1}{a^{1001}}+\frac{1}{b^{1001}}+\frac{1}{c^{1001}}=\frac{1}{a^{1001}+b^{1001}+c^{1001}}.$$

3. feladat (**AD**$_{H}ALADOK_{2}001_{1}ford_{I}IIkat_{2}fel$)

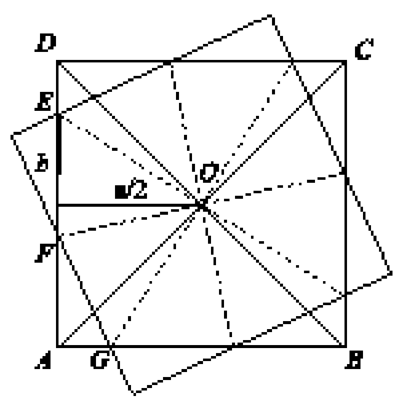
Az a oldalú Nnégyzetet a középpontja körül elforgatva az N' négyzetet kapjuk. A két négyzet közös része olyan nyolcszög, amelynek mindegyik oldala b hosszú.

a) Fejezzük ki a nyolcszög területét a-val és b-vel!

b) Ha az N és N' négyzet metszetének területe$t$, uniójának területe pedig T, akkor igazoljuk, hogy

$$\sqrt{t \cdot T} < a^2 < \sqrt{\frac{t^2 + T^2}{2}}.$$

1. megoldás (**AD**$_{H}ALADOK_{2}001_{1}ford_{I}IIkat_{2}fel_{1}mego$)



OEF **háromszög egybevágó** ***OFG*** **háromszöggel, mert** ***OF*** **mindkettőben benne van,** ***OG=OE*** O **körüli 90 fokos forgatás miatt, és** ***EF = FG*** **a feltétel miatt.**

$$T_{nyolcszög} = T_{OFE} * 8 = \frac{ab}{4} * 8 = 2ab$$

$$T = 2a^2 - 2ab$$

$$t = 2ab$$

$$\frac{T+t}{2}=a^2$$

mértani közép:

$$\sqrt{Tt}$$

számtani közép:

$$\frac{T+t}{2}$$

$$\sqrt{Tt}<\frac{T+t}{2}<\sqrt{\frac{T^2+t^2}{2}}$$

A mértani, számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenség miatt (t≠T).

4. feladat (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{1}ford_{I}IIkat_{2}fel$)

The side of square N is denoted by a. Rotating N around its centre we get N'. The common part of the two squares is an octogon. Each side of this octogon has length b.

a) Determine the area of the octogon in terms of a and b.

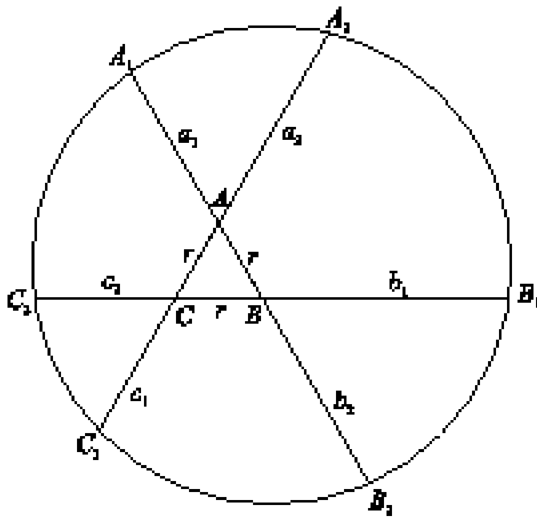
b) The area of the intersection of N and N' is t, the area of the union of N and N' is T. Prove that $\sqrt{t\cdot T}<a^2<\sqrt{\frac{t^2+T^2}{2}}$.

5. feladat (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{1}ford_{I}IIkat_{3}fel$)

A k kör belsejében levő $\boldsymbol{ABC}$ szabályos háromszög oldalegyenesei ak kört az $A_{1,}A_2$, B_1, B_2, C_1,C_2 pontokban metszik a következő betűzés szerint: az $\boldsymbol{AB}$ oldalegyenes metszéspontjai a körrel A_1 és B_2. Hasonlóan: a $\boldsymbol{BC}$ egyenes metszetei a körrel B_1, illetve C_2, és a $\boldsymbol{CA}$ egyenes metszetei a körrel C_1, illetve A_2 az ábrának megfelelően.

Bizonyítsuk be, hogy

$$\boldsymbol{AA}_1+\ \boldsymbol{BB}_1+\ \boldsymbol{CC}_1\ =\boldsymbol{AA}_2+\ \boldsymbol{BB}_2+\ \boldsymbol{CC}_2.$$



1. megoldás (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{1}ford_{I}IIkat_{3}fel_{1}mego$)

Tekintsük A, B, C pontoknak a k körre vonatkozó hatványát. Eszerint:

$$a_1(r+b_2) = a_2(r+c_1)$$

$$b_1(r+c_2) = b_2(r+a_1)$$

$$c_1(r+a_2) = c_2(r+b_1)$$

Az egyenleteket összeadva és kibontva:

$a_1r+a_1b_2+b_1r+b_1c_2+c_1r+c_1a_2 = a_2r+a_2c_1+b_2r+b_2a_1+c_2r+c_2b_1$

$r(a_1+b_1+c_1) = r(a_2+b_2+c_2)$

$r \neq 0$ **mert háromszög oldal, ezért**

$a_1+b_1+c_1 = a_2+b_2+c_2$

és ezt kellett bizonyítani.

6. feladat (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{1}ford_{I}IIkat_{3}fel$)

We have six points on a circle in the following order: $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$**.** $A_1B_2 \cap A_2C_1 = A$**,** $B_1C_2 \cap B_2A_1 = B$**,** $C_1A_2 \cap C_2B_1 = C$**. We know that triangle** $\boldsymbol{ABC}$ **is equilateral. Prove that**

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = AA_2 + BB_2 + CC_2.$$

7. feladat ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_1 ford_I IIkat_4 fel$)

121 darab pozitív egész számról tudjuk, hogy összegük 360. Bizonyítsuk be, hogy az adott 121 darab pozitív egész szám közül ki lehet néhányat választani úgy, hogy a kiválasztott számok összege 120 legyen.

1. megoldás ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_1 ford_I IIkat_4 fel_1 mego$)

A számok: a_1, a_2, a_3, a_4, ... , a_{121}

Készítünk 121 csoportot :

a_1

$a_1 + a_2$

$a_1 + a_2 + a_3$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

.

.

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{121}$

Ha nézzük ennek a 121 csoportnak a 120-as maradékait, akkor a skatulya elv szerint biztosan van két azonos maradékú. Mivel nincs két azonos összegű csoport, a két azonos maradékút kivonva egymásból a 120-as maradék 0 lesz. Ez a maradék vagy 120 és ekkor készen vagyunk, vagy 240 akkor pedig a kivonás után maradt halmaz komplementere jó, hiszen az összeg 360.

8. feladat ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_1 ford_I IIkat_4 fel$)

We have 121 positive integers, the sum of which is 360. Prove that we can choose a few of them such that the sum of the chosen numbers is 120.

9. feladat ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_1 ford_I Ikat_1 fel$)

Let x, y be real numbers such that $\boldsymbol{x+y+xy}$ is rational and $x^4 + y^4$ is irrational. Prove that $\boldsymbol{xy}$ is irrational.

10. feladat ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_1 ford_I Ikat_2 fel$)

Let *ABCD* be a circumscribed quadrilateral such that *AB* is parallel to *CD* and $BOC\angle = AOD\angle = 120°$**. Prove that if the radius of the circumcircle is 1 then the area of *ABCD* is at most** $\sqrt{3}$**.**

11. feladat ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_1 ford_I Ikat_3 fel$)

Let $f(x) = x^2 - 4|x-1| - p$ **be a function over the real numbers, where** p **is a real parameter. There are exactly three values of** x **such that** $f(x)$**=1. Determine the value of** p**.**

12. feladat ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_1 ford_I Ikat_4 fel$)

Prove that among any 2001 consecutive positive integers one can always find a number for which the sum of the digits is divisible by 27.

13. feladat ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_1 ford_I Ikat_5 fel$)

We put 120 unit squares inside a 20×25 rectangle. Prove that we can also put a circle of unit diameter inside the rectangle which has no common inner point with the squares.

14. feladat ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_1 ford_I kat_1 fel$)

Bizonyítsuk be, hogy minden 0 < a **< 1 számra**

$$\frac{\mathbf{2000^2}}{(\mathbf{1}-a)} + \frac{\mathbf{1}}{a} \geq \mathbf{2001}^{\mathbf{2}.Milyen}$$

a -$ra\acute{a}ll fennegyenl\H{o}s\acute{e}g$?

1. megoldás ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_1 ford_I kat_1 fel_1 mego$)

Szorozzunk fel (1-a**)** $\cdot$ a**-val! (mivel 0<** a **<1, emiatt sem**a**,sem 1-**a **nem lehet 0; ráadásul nem változik az egyenlőtlenség iránya sem, hisz (1-**a**)** $\cdot$ a**pozitív)**

$$2000^2 \cdot a + 1 - a \geq 2001^2 \cdot a - 2001^2 \cdot a^2$$

$$1 - a \geq a \cdot \left(2001^2 - 2000^2\right) - 2001^2 \cdot a^2$$

$$1 - a \geq a \cdot (2001 + 2000)\,(2001 - 2000) - 2001^2 \cdot a^2$$
$$1 \geq 4002 \cdot a - 2001^2 \cdot a^2$$
$$(2001 \cdot a - 1)^2 \geq 0$$

Ez viszont természetesen mindig teljesülni fog. Egyenlőség csak akkor lehet, ha

$$1 = 2001 \cdot a$$

Vagyis ha

$$a = \frac{1}{2001}.$$

15. feladat (AD$_H ALADOK_2 001_1 ford_I kat_1 fel$)

Prove that if 0$<a<$**1 then**

$$\frac{2000^2}{1-a} + \frac{1}{a} \geq 2001^2.$$

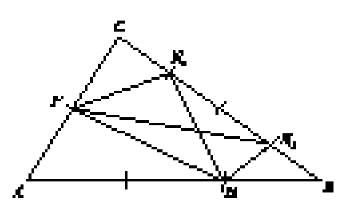
Find the values of a when equality holds.

16. feladat (AD$_H ALADOK_2 001_1 ford_I kat_2 fel$)

Az *ABC* háromszög *AB* oldalának B**-hez közelebbi harmadolópontja** H, **a *BC* oldal** B**-hez legközelebbi negyedelőpontja** N_1, C**-hez legközelebbi negyedelőpontja** N_2. **A *CA* oldal felezőpontja** F.

Bizonyítsa be, hogy az *FHN*$_1$ és az *FHN*$_2$ háromszögek területének összege az *ABC* háromszög területének felével egyenlő!

1. megoldás (AD$_H ALADOK_2 001_1 ford_I kat_2 fel_1 mego$)



A háromszög területe legyen T.
Az $\boldsymbol{FHN}_1$ háromszög területe:

$$T_{FHN_1} = T_{ABC} - T_{AHF} - T_{HBN_1} - T_{FCN_1}$$

$$T_{AHF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}T = \frac{1}{3}T$$

$$T_{HBN_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}T = \frac{1}{12}T$$

$$T_{FCN_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}T = \frac{3}{8}T$$

Ezeket behelyettesítve:

$$T_{FHN_1} = \frac{5}{24}T$$

Az $\boldsymbol{FHN}_2$ háromszög területe:

$$T_{FHN_2} = T_{ABC} - T_{AHF} - T_{HBN_2} - T_{FCN_2}$$

$$T_{AHF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}T = \frac{1}{3}T$$

$$T_{HBN_2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}T = \frac{1}{4}T$$

$$T_{FCN_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}T = \frac{1}{8}T$$

Ezeket behelyettesítve:

$$T_{FHN_2} = \frac{7}{24}T$$

Tehát a két háromszög területének összege 12/24T vagyis valóban az $\boldsymbol{ABC}$ háromszög területének fele.

17. feladat (AD$_HALADOK_2001_1ford_Ikat_2fel$)

On the sides $\boldsymbol{AB}$ and $\boldsymbol{CA}$ of triangle $\boldsymbol{ABC}$ there are H and F respectively such that $\boldsymbol{AH}$:$\boldsymbol{HB}$=2:1 and $\boldsymbol{CF}$:$\boldsymbol{FA}$=1:1. On the side $\boldsymbol{BC}$ we have N_1 and N_2 such that $\boldsymbol{BN}_1$:N_1C=$\boldsymbol{CN}_2$:N_2B=1:3.

Prove that the sum of the areas of $\boldsymbol{FHN}_1$ and $\boldsymbol{FHN}_2$ is half of the area of $\boldsymbol{ABC}$.

18. feladat ($\mathbf{AD}_{H}ALADOK_2 001_1 ford_I kat_3 fel$)

Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$(x^2 + y^2)^3 = (x^3 - y^3)^2$$

egyenletet!

1. megoldás ($\mathbf{AD}_{H}ALADOK_2 001_1 ford_I kat_3 fel_1 mego$)

Bontsuk ki a zárójeleket!

$x^6 + \mathbf{3}x^4y^2 + \mathbf{3}x^2y^4 + y^6 = x^6$**-** $\mathbf{2}x^3y^3 + y^6$

Továbbrendezve:

$x^2y^2(\mathbf{3}x^2 + \mathbf{3}y^2 + \mathbf{2xy}) = \mathbf{0}$

Egy szorzat akkor lehet 0, ha valamelyik tényezője 0.

a) x**=0**

b) y**=0**

c) $\mathbf{3}x^2 + \mathbf{3}y^2 + \mathbf{2xy} = \mathbf{0}$

c) $(x+y)^2 + \mathbf{2}x^2 + \mathbf{2}y^2 = \mathbf{0}$

Csak akkor lehet, ha $x = y$**=0.**

Tehát az egyenlőség akkor áll fenn, ha x **vagy** y **= 0. Ekkor a másik bármi lehet.**

19. feladat ($\mathbf{AD}_{H}ALADOK_2 001_1 ford_I kat_3 fel$)

Find the real solutions:

$$\left(x^2 + y^2\right)^3 = \left(x^3 - y^3\right)^2.$$

20. feladat ($\mathbf{AD}_{H}ALADOK_2 001_1 ford_I kat_4 fel$)

Bizonyítsuk be, hogy 2001 egymást követő pozitív egész szám között mindig van olyan, amelyre igaz, hogy a számjegyeinek összege osztható 27-tel!

1. megoldás ($\mathbf{AD}_{H}ALADOK_2 001_1 ford_I kat_4 fel_1 mego$)

Ha 0 a kijelölt 2001 szám között van, akkor az állítás triviális. Ha 0 nincs a kijelölt számok között, akkor vagy csak pozitív, vagy csak negatív elmei vannak a meghatározott 2001 hosszú számsornak. Ezen két eset között csak előjelbeli különbség van, oszthatósági szempontból azonosak, ezért

elegendő pozitív számokra vizsgálni az állítást. Az egymást követő 2001 szám között biztosan van a következőképpen megadható két szám: $k \times 1000$; $k \times 1000 + 999$, különben az intervallum hossza maximum. 1998 lenne. Azt állítjuk, hogy ezen két szám közötti számok számjegyösszege 27-tel osztva teljes maradékrendszert ad. Ehhez elegendő azt belátnunk, hogy 0-tól 999-ig minden maradék előfordul 27-tel osztva, hiszen „$k \times 1000$” számjegyösszegét hozzáadva ehhez a teljes maradékrendszerhez, teljes maradékrendszert kapunk. Ez az állítás pedig nyilvánvalóan igaz, pl. 0-9, 90-99, 990-999-ig minden maradék előfordul.

21. feladat ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_1 ford_I kat_4 fel$)

Prove that among any 2001 consecutive positive integers one can always find a number for which the sum of the digits is divisible by 27.

22. feladat ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_1 ford_I kat_5 fel$)

Egy 20x25-ös téglalapban elhelyeztünk tetszőlegesen 120 db egységnyi oldalú négyzetet. Bizonyítsuk be, hogy még egy olyan egységnyi átmérőjű kör is elfér a téglalapban, amelynek nincs közös belső pontja a négyzetekkel! (Négyzeten most négyzetlapot, körön most körlapot értünk.)

1. megoldás ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_1 ford_I kat_5 fel_1 mego$)

Vizsgáljuk azt, hogy hol helyezkedhet el a keresett kör középpontja! Ha be tudjuk bizonyítani, hogy a négyzetek letevése után is lesz hely a kör középpontjának, akkor készen vagyunk.

a) A négyzetek oldalához 1/2-nél nem lehet közelebb a középpont.

Egy négyzet által letiltott terület:

$$1 + 4 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \pi = 3 + \frac{\pi}{4}.$$

b) A téglalap kerületéhez 1/2-nél nem lehet közelebb:

Ez
$$18 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + 25 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 43$$
egységnyi területet tilt le.

Tehát a maximálisan letiltható terület:
$$120 \cdot (3 + \frac{\pi}{4}) + 43 \leq 498.$$
Vagyis a maximálisan letiltható terület nagysága kisebb, mint 500. Tehát lesz hely a kör középpontjának, vagyis elhelyezhető lesz.

23. feladat (AD$_H ALADOK_2 001_1 ford_I kat_5 fel$)

We put 120 unit squares inside a 20×25 rectangle. Prove that we can also put a circle of unit diameter inside the rectangle which has no common inner point with the squares.

24. feladat (AD$_H ALADOK_2 001_2 ford_I IIkat_1 fel$)

Bizonyítsuk be, hogy az összes olyan pozitív egész alapú számrendszerben, amelyben az $\overline{abc}$ és a $\overline{cba}$ pozitív egész szám hányadosa 2, teljesül az $a + c = b$összefüggés.

1. megoldás (AD$_H ALADOK_2 001_2 ford_I IIkat_1 fel_1 mego$)

$\overline{abc} = 2\overline{cba}$ a k-as számrendszerben ($k \geq 2$; egész) Eszerint $a > c$.
$$(1)\ (ck^2 + bk + a) \cdot 2 = ak^2 + bk + c$$
Ha $2a \equiv c\ (k)$ és $k > a > c > 0$ akkor
$$(2)\ 2a = k + c$$
Ekkor
$$(3)\ 2b + 1 = k + b$$
és
$$(4)\ 2c + 1 = a$$

mert

$$2ck^2 + 2bk + 2a = ak^2 + bk + c$$

levonva (2)-t

$$2ck^2 + 2bk = ak^2 + (b-1)k / :k \ (k \text{nem } 0)$$

Ebből $2b \equiv (b-1)k \quad k > \quad b > 0$ **Így megkapjuk (3)-at.**

$$2ck + 2b = ak + b - 1 \ / -(3)$$

$$2ck - 1 = (a-1)k - 1 \ / +1, :k$$

$$2c = a - 1$$

(2)-ből kifejezve k**-t:**
$k = 2a - c$

$$2b + 1 = 2a - c + b$$

$b = 2a - \mathbf{c} - 1$
$b = a + \quad a - \mathbf{c} - 1$
(4)-ből kifejezve c**-t:**
$c = a - \mathbf{c} - 1$
Ezt behelyettesítve
$b = a + c$
Tehát az állítás igaz minden $k \geq 2$**-es, egész, számrendszerben.**

25. feladat (**AD**$_{H}ALADOK_{2}001_{2}ford_{I}IIkat_{1}fel$)

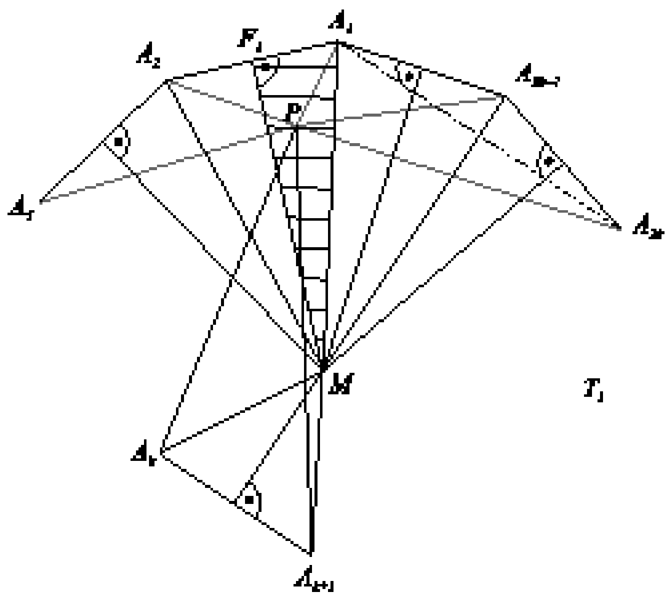
We take two numbers in base k**:** $\overline{abc}$ **and** $\overline{cba}$**. Prove that if** $\overline{abc}$**=2**$\overline{cba}$**, then** $a + c = b$**.**

26. feladat (**AD**$_{H}ALADOK_{2}001_{2}ford_{I}IIkat_{2}fel$)

Adott egy 2k**+1 alakú szabályos sokszög, melyek belsejében vagy határán felveszünk egy** P **pontot.** P**-nek a sokszög csúcsaitól mért távolságát jelölje (nagyság szerinti sorrendben)**

$$d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_{2k+1}.$$

Milyen P **pont esetén lesz** d_{k+1} **maximális?**



1. megoldás ($\mathbf{AD}_{H}ALADOK_{2}001_{2}ford_{I}IIkat_{2}fel_{1}mego$)

Húzzuk meg a sokszög minden oldalának felezőmerőlegesét. Mivel a sokszög szabályos ezek egy pontban metszik egymást, ez legyen M.Legyen P pont az A_1F_1M háromszögben, így P pont összes elhelyezkedését vizsgáljuk, hiszen biztos benne lesz egy ilyen derékszögű háromszögben.

P pont akárhol helyezkedik el ebben a $\mathbf{T}_1$ tartományban, ha

$$d_i \geq d_j$$

akkor bármilyen másik helyzete esetén is

$$d_i \geq d_j$$

$$\boldsymbol{PA}_1 = d_1,\ \boldsymbol{PA}_2 = d_2,\ \boldsymbol{PA}_{2k+1} = d_3,\ \boldsymbol{PA}_3 = d_4,\ \boldsymbol{PA}_{2k} = d_5$$

Hiszen P pont a sokszög „bal felén" van és
A_kA_{k+1} párhuzamos $A_{k-1}A_{k+2}$ párh. . . . . . A_1A_{2k}valamint párhuzamos A_2A_{2k+1}-gyel.

Valamint ahhoz, hogy megnézzük, hogy $\boldsymbol{PA}_i$ és $\boldsymbol{PA}_j$ közül melyik nagyobb, meg kell nézni hogy A_iA_j felezőmerőlegesének melyik partjára esik P. Tehát

$$PA_1 \leq PA_2 \leq PA_{2k+1} \leq ... \leq PA_k \leq PA_{k+1}$$

Ha k páros akkor d_{k+1} szakasz végpontja (nem P) a sokszög „jobb oldali" részén van, legyen A_tMost ekkor a csúcshoz kell megtalálni azt a P pontot melyre d_{k+1}maximális. Ez pedig akkor teljesül, ha P pont F_1A_1-en van és innen F_1van legtávolabb A_t-től, hiszen A_1F_1 felezőmerőlegese a síkot két olyan félsíkra bontja, hogy A_1 és A_t egy félsíkra esik. Tehát ha k páros, akkor P pontot az oldalfelező pontba kell tenni hogy d_{k+1}maximális legyen.

Ha k páratlan, akkor d_{k+1} szakasz végpontja (nem P) a sokszög „bal oldali" részén van. Ekkor P pontnak A_1M-en kell lennie, hogy d_{k+1} maximális legyen. Mivel A_1M felezőmerőlegesének az M-et tartalmazó partján van A_t, ezért A_1-be kell rakni P-t hogy d_{k+1}maximális legyen.

Tehát ha k páros,P az oldalfelező ponton, ha k páratlan P a csúcsban van.

27. feladat (**AD**$_H ALADOK_2 001_2 ford_I IIkat_2 fel$)

P is either on the perimeter or inside a regular $2k+1$-gon. Let d_i denote the distance of P from the vertices of the $2k+1$-gon in an increasing order $d_1 \leq d_2 \leq ... \leq d_{2k+1}$. For which P shall we get the maximal d_{k+1}?

28. feladat (**AD**$_H ALADOK_2 001_2 ford_I IIkat_3 fel$)

Van N darab chip, amelyek képesek egymás tesztelésére a következő módon: ha kettőt összekapcsolunk, akkor mindkettő kijelzi a másik chipről, hogy jó e vagy hibás. A jó chip mindig helyesen válaszol, a hibás chip véletlenszerű eredményt ad. Tudjuk. Hogy az összes chipnek több mint a fele jó. Lehetséges-e N-nél kevesebb teszt végrehajtásával kiválasztani egy jó chipet?

1. megoldás (**AD**$_H ALADOK_2 001_2 ford_I IIkat_3 fel_1 mego$)

Ha N páros, akkor legalább 2-vel több jó chip van, tehát ha egyet eldobunk a többség megmarad. Ha páratlan sok van, nem nyúlunk hozzá. Egy darab kivételével párba rendezzük őket. Ha a párban olyan a válasz, hogy a másik rossz, akkor a kettő között biztosan van rossz, hiszen ez két jónál nem fordulhat elő. Ha nincs, akkor vagy mindkettő jó, vagy mindkettő rossz. Vegyes páros nem fordulhat elő, hiszen a jó rossznak találná a hibásat.

Azokat a párokat, melyekben volt olyan válasz, hogy a másik rossz, félretesszük. Mivel legalább annyi hibásat tettünk félre, mint hibátlant, ezért jóból továbbra is több maradt.

A maradék páratlan számú. Az nyilvánvaló, hogy legalább annyi jó van, mint rossz.

I. Páratlan számú pár van. Ekkor elveszünk minden pár egy tagját és a mérésből kimaradtat.

II. Páros számú pár van. Elveszünk minden pár egy tagját.

Egyszerűen belátható, hogy mindkét esetben ugyanazt kaptuk ismét, hogy páratlan számú chipünk van, és több jó van közöttük. Ezt a műveletsort többször elvégezzük. Ekkor k db. mérés után legalább k db-bal csökken a bennmaradtak száma, így a műveletet véges sokszor elvégezve legfeljebb N-1 méréssel készen vagyunk, 1 db jó chip marad.

29. feladat (**AD**$_{H}ALADOK_{2}001_{2}ford_{I}IIkat_{3}fel$)

We have N chips, they are able to test each other in the following way. Connecting two of them, each will indicate whether the other one is good or not. A good chip always gives a correct answer, a wrong one answers randomly. At least half of the chips are good. Is it possible to choose a good chip by testing less than N times?

30. feladat (**AD**$_{H}ALADOK_{2}001_{2}ford_{I}Ikat_{1}fel$)

Oldjuk meg az egész számok körében az

$$ab + cd = -1$$

$$ac + bd = -1$$

$$ad + bc = -1$$

egyenletrendszert!

1. megoldás (AD$_H ALADOK_2 001_2 ford_I Ikat_1 fel_1 mego$)

Páronként összeadjuk az egyenlőségek megfelelő oldalait:

(1)+(2): $\boldsymbol{ab + ac + cd + bd} = (a+d)(b+c) = \mathbf{-2}$ **(4)**

(1)+(3): $\boldsymbol{ab + ad + cd + bc} = (\mathrm{a} + c)(b+d) = \mathbf{-2}$ **(5)**

(2)+(3): $\boldsymbol{ac + ad + bd + bc} = (a+b)(c+d) = \mathbf{-2}$ **(6)**

A 6 darab kéttagú összeg mindegyikének abszolútértéke 1 vagy 2 (mivel a, b, c, d **egészek). Különböztessünk meg eseteket** a, b, c, d **előjele szempontjából! Nyilvánvalóan nem lehet mind a 4 szám pozitív, vagy mind negatív, ekkor a jobboldal mindenütt pozitív lenne.**

a) 3 darab negatív: 2 negatív összege nem lehet kisebb –2-nél, így (mivel minden lehetséges párosítás létrejön (4), (5), (6)-ban), mind a 3 darab –1-gyel egyenlő. Ekkor a 4. szám csak 1–(–1)=2 lehet.

b) 3 darab pozitív: Hasonló gondolattal jutunk az 1, 1, 1, –2 kizárólagos számnégyeshez.

c) 2 darab negatív: Az előbbiekhez hasonlóan mindkettő –1 lesz, a másik 2 db összege 1 (mivel (–2)/((–1)+(–1))=1), így (egészek lévén) 0 és 1 lesznek. Azonban 2 olyan szám nem lehet ezek közt, mert akkor egy kéttagú összeg értéke 0 lesz, (4), (5), (6) egyike 0 lenne. Mivel itt 1+(–1)=0, ezért ilyen megoldás nincs.

Tehát a 8 db megoldás:

A	b	c	d		a	b	c	d
–1	–1	–1	2		1	1	1	–2
–1	–1	2	–1		1	1	–2	1
–1	2	–1	–1		1	–2	1	1
2	–1	–1	–1		–2	1	1	1

Ezek valóban kielégítik az eredeti egyenletrendszert.

31. feladat (AD$_H ALADOK_2 001_2 ford_I Ikat_1 fel$)

Find the integer solutions:

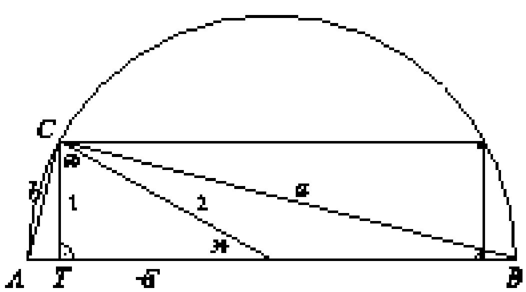
$$
\begin{aligned}
ab + cd &= -1 \\
ac + bd &= -1 \\
ad + bc &= -1
\end{aligned}
$$

32. feladat (AD$_HALADOK_2001_2ford_IIkat_2fel$)
Az a és b befogójú derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága az átfogó negyedrésze. Mekkora ekkor

$$\left(\frac{a}{b}\right)^6 + \left(\frac{b}{a}\right)^6$$

értéke?

1. megoldás (AD$_HALADOK_2001_2ford_IIkat_2fel_1mego$)



Az átfogót négy egységnek véve az $ATC\Delta$ és a $CTB\Delta$ hasonlóságából felírhatjuk a következő arányt:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$$

ebből:

$$\frac{b}{a} = 2 - \sqrt{3}$$

ezeket a hatodikra emelve

$$1351 - 780\sqrt{3} + \frac{1}{1351 - 780\sqrt{3}}$$

-at kapunk. Az utóbbit $1351+780\sqrt{3}$ **-al bővítve:**

$$\frac{1351+780\sqrt{3}}{1351^2-780^2\cdot 3}$$

ami

$$\frac{1351+780\sqrt{3}}{1}$$

A kettő összege így

$$1351-780\sqrt{3}+1351+780\sqrt{3}=\underline{\underline{2702}}$$

33. feladat (AD$_H ALADOK_2 001_2 ford_I Ikat_2 fel$)

The legs of a right triangle are a **and** b**. The length of the altitude to the hypotenouse is the quarter of the hypotenouse. Find the value of** $\left(\frac{a}{b}\right)^6+\left(\frac{b}{a}\right)^6$**.**

34. feladat (AD$_H ALADOK_2 001_2 ford_I Ikat_3 fel$)

Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c **valós számokra teljesül az**

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$

összefüggés, akkor

$$\frac{1}{a^{1001}}+\frac{1}{b^{1001}}+\frac{1}{c^{1001}}=\frac{1}{a^{1001}+b^{1001}+c^{1001}}.$$

1. megoldás (AD$_H ALADOK_2 001_2 ford_I Ikat_3 fel_1 mego$)

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$

$$(a+b+c)(ac+ab+bc)=abc$$

Kibontjuk

$$\boldsymbol{3abc}+a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b=\boldsymbol{abc}$$

Szorzattá alakítjuk

$$(a+b)(a+c)(b+c)=0$$

A szorzat akkor 0, ha a valamelyik tényezője 0. Legyen ez az (a+b)

$$a=-b$$

$$\frac{1}{a^{2001}}+\frac{1}{b^{2001}}+\frac{1}{c^{2001}}=\frac{1}{a^{2001}+b^{2001}+c^{2001}}$$

Mert a^{2001}=–b^{2001}, tehát ebből azonosságot kapunk.

35. feladat (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{2}ford_{I}Ikat_{3}fel$)

Let a, b, c be real numbers such that $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$. Prove that

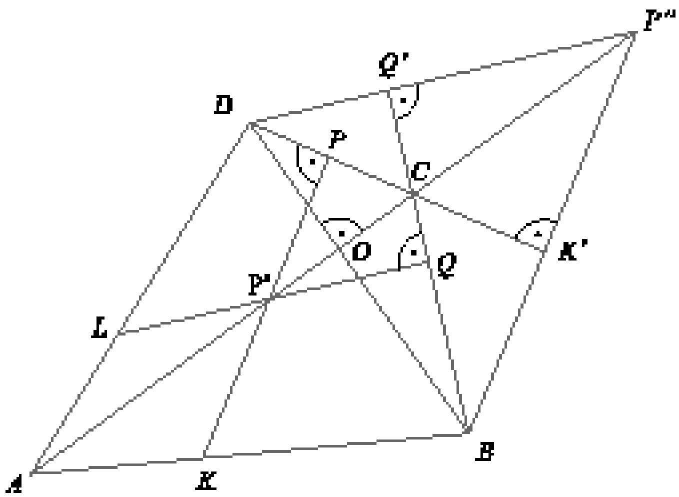
$$\frac{1}{a^{1001}}+\frac{1}{b^{1001}}+\frac{1}{c^{1001}}=\frac{1}{a^{1001}+b^{1001}+c^{1001}}.$$

36. feladat (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{2}ford_{I}Ikat_{4}fel$)

Az $\boldsymbol{ABCD}$ konvex négyszög $\boldsymbol{AC}$ és $\boldsymbol{BD}$ átlója merőleges egymásra. Az $\boldsymbol{AB}$ oldal K felezőpontjából állítsunk merőlegest $\boldsymbol{DC}$ oldalegyenesre. Ennek talppontja legyen P. Az $\boldsymbol{AD}$ oldal felezőpontjából a $\boldsymbol{BC}$ oldalegyenesre állított merőleges talppontja legyen Q. Bizonyítsuk be, hogy a $\boldsymbol{KP}$ és $\boldsymbol{LQ}$ egyenesek az $\boldsymbol{AC}$ átló egyenesén metszik egymást!

1. megoldás (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{2}ford_{I}Ikat_{4}fel_{1}mego$)

A **pontból nagyítsuk kétszeresére az ábrát úgy, hogy L pont D-be, K pont pedig B-be kerüljön. $\boldsymbol{KP}$ egyenesének a képe $\boldsymbol{BP}$" egyenese, és mivel $\boldsymbol{KP}|\boldsymbol{BP}$", ezért $\boldsymbol{BK}$'$\perp$$\boldsymbol{DK}$'. $\boldsymbol{LQ}$ egyenesének képe $\boldsymbol{DP}$" egyenesével esik egybe, és mivel $\boldsymbol{LQ}|\boldsymbol{DQ}$', ezért $\boldsymbol{DQ}$'$\perp$ Q'B. $\boldsymbol{DCB}$ háromszög magasságai tehát $\boldsymbol{BK}$', $\boldsymbol{DQ}$', és $\boldsymbol{CO}$, hiszen a négyszög átlói merőlegesek egymásra. Ezen 3 magasságegyenes P" pontban metszik egymást. Tehát P" a $\boldsymbol{BCD}\Delta$ magasságpontja. De P" éppen P' pont nagyított képe. Ha mindent visszakicsinyítünk, P'-n tehát átmegy $\boldsymbol{KP}$ és $\boldsymbol{LQ}$ szakasz és P' rajta van $\boldsymbol{AC}$-n.**



Tehát *KP* és *LQ* valóban *AC*-n metszik egymást.

megj: Ebben a bizonyításban azt nem is használtuk ki, hogy K és L felezőpontok, csak azt, hogy ugyanolyan arányú osztópontok.

37. feladat ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_2 ford_I Ikat_4 fel$)

Let *ABCD* be a convex quadrilateral whose diagonals, *AC* and *BD*, are perpendicular. Let K be the midpoint of *AB*. We drop a perpendicular from K to line *DC*, and its foot is P. Let L be the midpoint of *AD*. We drop a perpendicular from L to line *BC*, and its foot is Q. Prove that *KP*, *LQ* and *AC* are concurrent.

38. feladat ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_2 ford_I kat_1 fel$)

Bizonyítsuk be, hogy

$$1 \bullet 2 \bullet \ldots \bullet 2001 + 2002 \bullet 2003 \bullet \ldots \bullet 4002$$

osztható 4003-mal!

1. megoldás ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_2 ford_I kat_1 fel_1 mego$)

Vizsgáljuk meg a számok 4003-mal való osztási maradékait:

$$2002 \equiv -2001\ (4003)$$

$$2003 \equiv -2000\ (4003)$$

$$2004 \equiv -1999\ (4003)$$

.

.

$$4001 \equiv -2 (4003)$$

$$4002 \equiv -1 (4003)$$

Majd behelyettesíthetjük a kongruenciák jobb oldalán található számokat a feladatban szereplő összeg jobb oldalába, így:

2002•2003•2004•...•4002 helyébe:

(-2001)•(-2000)•(-1999)•...•(-1).

Ekkor észrevehetjük, hogy a bal oldali szorzat 4003-as osztási maradéka (-1)-szerese a jobb oldaliénak:

$$(-1)\bullet 1\bullet 2\bullet \ldots \bullet 2001 \equiv (-2001)\bullet(-2000)\bullet(-1999)\bullet\ldots\bullet(-1)\ (4003)$$

Mert a jobb oldalon páratlan számú negatív tag áll.
Ezért:

$$1\bullet 2\bullet 3\bullet \ldots \bullet 2001 + (-2001)\bullet(-2000)\bullet(-1999)\bullet\ldots\bullet(-1) \equiv 0\ (4003)$$

$$1\bullet 2\bullet 3\bullet \ldots \bullet 2001 + 2002\bullet 2003\bullet 2004\bullet \ldots \bullet 4002 \equiv 0\ (4003)$$

Tehát 1•2•...•2001 + 2002•2003•...•4002 osztható 4003-mal.

39. feladat (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{2}ford_{I}kat_{1}fel$)

Prove that $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2001 + 2002 \cdot 2003 \cdot ... \cdot 4002$ **is divisible by 4003.**

40. feladat (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{2}ford_{I}kat_{2}fel$)

Oldjuk meg a természetes számok halmazán a

$$\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=10$$

egyenletet!

1. megoldás (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{2}ford_{I}kat_{2}fel_{1}mego$)

Emeljük négyzetre az egyenletet:

$$x+y+x-y+2\cdot\sqrt{(x+y)\,(x-y)}=100$$

Az egyszerűsítések után a következőt kapjuk:

$$\sqrt{x^2-y^2}=50-x$$

Látható, hogy $x \leq$ **50 –nek kell teljesülnie és az egyenlet bal oldalából következik, hogy** $y \leq x$**, azaz** $y \leq$ **50. Még egy négyzetre emelés után:**

$$x^2-y^2=50^2+x^2-100x$$

Az átalakítások elvégzésével

$$y^2=100x-50^2=100x-2500=100\,(x-25)$$

-höz jutunk, vagyis y^2 **osztható 100-zal, így** y **10-zel lesz osztható.**

y **helyébe 10, 20, 30, 40 ill. 50-et helyettesítve**

x **értékéhez 26, 29, 34, 41 és 50 jön ki, tehát a megoldás:**

x_1**=26** x_2**=29** x_3**=34** x_4**=41** x_5**=50**

y_1**=10** y_2**=20** y_3**=30** y_4**=40** y_5**=50**

41. feladat (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{2}ford_{I}kat_{2}fel$)

Solve the following equation over the natural numbers of :

$$\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=10.$$

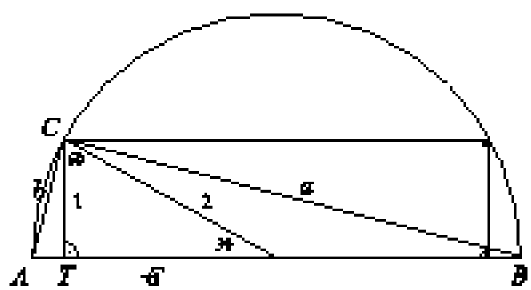
42. feladat (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{2}ford_{I}kat_{3}fel$)

Az a és b befogójú derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága az átfogó negyedrésze. Mekkora ekkor

$$\left(\frac{a}{b}\right)^6 + \left(\frac{b}{a}\right)^6$$

értéke?

1. megoldás ($\mathbf{AD}_{H}ALADOK_{2}001_{2}ford_{I}kat_{3}fel_{1}mego$)



Az átfogót négy egységnek véve az *ATC*Δ és a *CTB*Δ hasonlóságából felírhatjuk a következő arányt:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

ebből:

$$\frac{b}{a} = 2-\sqrt{3}$$

ezeket a hatodikra emelve

$$1351 - 780\sqrt{3} + \frac{1}{1351 - 780\sqrt{3}}$$

-at kapunk. Az utóbbit $1351 + 780\sqrt{3}$ **-al bővítve:**

$$\frac{1351 + 780\sqrt{3}}{1351^2 - 780^2 \cdot 3}$$

ami

$$\frac{1351 + 780\sqrt{3}}{1}$$

A kettő összege így

$$1351 - 780\sqrt{3} + 1351 + 780\sqrt{3} = \underline{\underline{2702}}$$

43. feladat (AD$_H ALADOK_2 001_2 ford_I kat_3 fel$)

The legs of a right triangle are a and b. The length of the altitude to the hypotenouse is the quarter of the hypotenouse. Find the value of $\left(\frac{a}{b}\right)^6 + \left(\frac{b}{a}\right)^6$.

44. feladat (AD$_H ALADOK_2 001_2 ford_I kat_4 fel$)

Egy 1 egység széles egyenes vonalzóval egy síkon szerkeszthetünk. Más segédeszközünk – ceruzán kívül – nincs. A szerkesztés során a következő lépések hajthatók végre:

a) tetszőleges számú pontot felvehetünk az adott síkon,

b) két felvett ponton át egyenes húzható a vonalzóval,

c) bármely megrajzolt egyenessel attól egységnyi távolságra lévő párhuzamos egyenes húzható.

Szerkesszünk$\sqrt{34}$ egység hosszú szakaszt a megengedett szerkesztési lépések alapján!

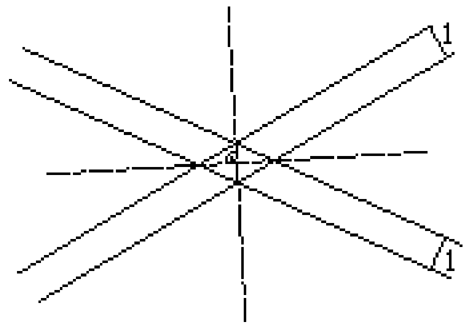
1. megoldás (AD$_H ALADOK_2 001_2 ford_I kat_4 fel_1 mego$)

Rajzoljunk 2 pár párhuzamos egyenest, melyek metszik egymást. Ezek egy rombuszt határoznak meg, mivel két magassága egyenlő!

A rombusz átlói merőlegesek egymásra, így a szemközti csúcsokat összekötve merőleges egyeneseket kapunk.

Az egyikre 3, míg a másikra 5 egységet mérünk fel az 1 egység széles vonalzónk segítségével. Az így keletkezett derékszögű háromszög átfogója Pitagoras tétele miatt$\sqrt{34}$egység.

45. feladat (AD$_H ALADOK_2 001_2 ford_I kat_4 fel$)



We have a ruler, whose width is 1 unit and a pencil. The following steps are allowed during construction:

a) Taking arbitrary points on the plane.

b) Drawing a straight line through any two given points.

c) Drawing a line parallel to any given line such that their distance is 1 unit.

Construct a segment with length $\sqrt{34}$ using these allowed steps.

46. feladat (AD$_H ALADOK_2 001_3 ford_I Ikat_1 fel$)

Hány olyan pozitív egész tízes számrendszerbeli n**-jegyű szám van, amelynek számjegyösszege** n^3 **– 40, ahol** n **pozitív egész szám?**

1. megoldás (AD$_H ALADOK_2 001_3 ford_I Ikat_1 fel_1 mego$)

A számjegyek összege legalább 1, és legfeljebb 9n**. Tehát: 1 ≤** n^3**–40 ≤ 9**n**.**

A bal oldali egyenlőtlenségből:

$$n^3 \geq 41$$

$$n \geq \sqrt{41} > 3$$

Ezek szerint n**nem lehet kevesebb 4-nél.**

A jobb oldali egyenlőtlenségből:

$$n^3 - 9n \leq 40$$

n=4-re: n^3–9n=28

n=5-re: n^3–9n=80

Mivel n^3–9n=(n–3)n(n+3), így ha n-et növeljük, akkor mindhárom tag nőni fog, és így a szorzatuk is (poz. n-re). Valamint n^3-9n folytonos függvény, amely így szigorúan monoton nő, ezért a 40-et csupán egyszer veszi fel.

Ezért n nem lehet több 4-nél.

A két megállapításból következik, hogy a keresett szám csak négyjegyű lehet. Ekkor a számjegyek összege 24.

Keressük meg az összes olyan 4 nemnegatív tagú összeget, ahol a tagok növekvő sorrendben vannak, és az összeg 24. (A tagok egészek)

Az első ilyen a 9+9+6+0. A következő a 9+9+5+1. A 9+9 kezdetűekből az utolsó 9+9+3+3. Ezután folytatjuk a 9+8 kezdetűekkel. Az utolsó 9 kezdetű a 9+5+5+5. A 8 kezdetűekkel folytatjuk. Az utolsó számnégyes a 6+6+6+6. Összesen 39 számnégyes van. Egy számnégyesből legfeljebb 4!=24 db négyjegyű szám állítható elő, ha 4 különböző számjegy van, és nincs köztük 0-ás. 18 db szám (3·3·2·1) ha van 0-ás és 4 különböző. 2 egyforma számjegy van, és van 0-ás, akkor 9 db, ha nincs, akkor 12 db. 2-2 egyforma számjegy van, akkor nincs 0; 4 alatt a 2= 6db szám. Ha 3 egyforma, és van 0-ás, akkor 3db; ha nincs, 4db. 4 egyforma számjegyből csak 1 szám állítható össze. Ez összesen 405 db számot ad.

47. feladat (AD$_HALADOK_2001_3ford_IIkat_1fel$)

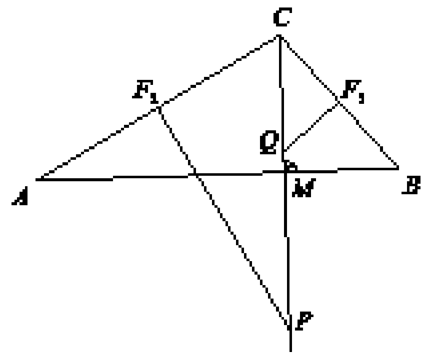
How many numbers are there which have n digits and the sum of the digits is n^3–40? (n is a positive integer.)

48. feladat (AD$_HALADOK_2001_3ford_IIkat_2fel$)

ABC **háromszögben** $BC < CA < AB$. **A** BC **oldal felezőmerőlegese Q-ban, az** AC **oldal felezőmerőlegese P-ben metszi a** C**-ből induló magasság egyenesét.**

Mekkora a háromszög legnagyobb szöge, ha $4\boldsymbol{PC}\cdot\boldsymbol{CQ}=\boldsymbol{AB}^2$?

1. megoldás ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_3 ford_I Ikat_2 fel_1 mego$)



$F_1\boldsymbol{CQ}$ Δ **hasonló az** $\boldsymbol{MBC}\Delta$ **-hez, hiszen** C**-nél lévő szögük közös, valamint mindkettő derékszögű. Innen:**

$$\frac{F_1C}{CQ}=\frac{CM}{BC},\ F_1C=\frac{BC}{2}$$

miatt

$$2CQ=\frac{BC^2}{CM}.$$

Hasonlóképpen elmondható, hogy $F_2\boldsymbol{PC}$ Δ **hasonló** $\boldsymbol{AML}$ Δ**-höz, amiből rövid számolás után:**

$$2CP=\frac{AC^2}{CM}$$

adódik.

Összeszorozva a két egyenletet:

$$4\cdot CP\cdot CQ=\frac{AC^2\cdot BC^2}{CM^2},$$

azaz az eredeti feltétel szerint

$$\frac{AC^2\cdot BC^2}{CM^2}=AB^2.$$

$\boldsymbol{AC}^2\cdot\boldsymbol{BC}^2=\boldsymbol{AB}^2\cdot\boldsymbol{CM}^2$ **ahol nyilván a jobb oldal a terület kétszeresének négyzete.**

Tehát $AC \cdot BC = 2T$, vagyis AC és BC bezárt szöge 90°, ami szükségszerűen az ABC háromszög legnagyobb szöge.

49. feladat (AD$_H ALADOK_2 001_3 ford_I Ikat_2 fel$)

In triangle ABC the following holds: $BC < CA < AB$. Line e is perpendicular to AB and goes through C. The perpendicular bisectors of BC and AC meet e at P and Q respectively. Determine the greatest angle of the triangle if $4CP \cdot CQ = AB^2$.

50. feladat (AD$_H ALADOK_2 001_3 ford_I Ikat_3 fel$)

Tekintsük az 1,2,3,...,2002 számsorozatot! Ezt a sorozatot átrendezhetjük a következő módon: egy lépésben a sorozat utolsó tagját előbbre helyezhetjük (akárhányadik helyre az 1.,2.,3.,...2002. sorszámú hely közül) azzal a megszorítással, hogy az előrébb helyezett tag nem előzhet meg nála nagyobb számot. A kapott új sorozatra ismét alkalmazható az előbb leírt lépés, egészen addig, amíg lehetséges. Bizonyítsuk be, hogy bármely lépés után olyan sorozatot kapunk, amelyben a $(2k-1)$-edik és a $2k$-adik tag közül az egyik páros a másik pedig páratlan szám, bármely $1 \leq k \leq 1001$ esetén.

1. megoldás (AD$_H ALADOK_2 001_3 ford_I Ikat_3 fel_1 mego$)

Ha a 2002-t előbbre helyezzük, akkor még egyszer nem kerülhet utolsónak, hiszen kisebb szám nem kerülhet nagyobb elé. Hasonlóan minden számot maximum egyszer helyezhetünk előrébb. Ezért véges sok lépés után már nem lehetséges áthelyezés. Képzeljük a számokat kettesével egy skatulyába, az elsőbe az 1 és a 2, ... az utolsóba a 2001 és a 2002 kerül. Minden skatulya, melybe tehető a 2002, páratlan számmal kezdődik. Ha 0 2002-t áthelyezzük valamelyik skatulyába, abban a 2002-n kívül egy db páratlan szám lesz, és azok a skatulyák, melyekbe a következő lépésben a 2001-be rakható párossal kezdődnek és páratlannal végződnek. Innen ugyan úgy folytatható az eljárás, mint az előbb, így minden lépés után minden skatulyában egy páros és egy páratlan szám lesz.

51. feladat (**AD**$_{H}ALADOK_{2}001_{3}ford_{I}Ikat_{3}fel$)

We have the numbers 1, 2, . . . , 2002 in this order. One can rearrange them by taking the last number and move it to the left to any position. The number which moves cannot overtake a bigger number. We repeat this procedure until it is possible.

Prove that after any rearrangement one of the (2k–1)th and (2k)th terms of the resulting sequence is an odd and the other is an even integer for every k=1, 2, . . . , 1001.

52. feladat (**AD**$_{H}ALADOK_{2}001_{3}ford_{I}kat_{1}fel$)

Az a, b, c, d **egész számokra** $a < b < c < d$ **teljesül. Tudjuk, hogy az**

$$E = (b-a)(b+c+d)(c+a+d)+(c-b)(c+a+d)(a+b+d)+(a-c)(a+b+d)(b+c+d)$$

kifejezés értéke prímszám. Mi ennek a prímszámnak az értéke?

1. megoldás (**AD**$_{H}ALADOK_{2}001_{3}ford_{I}kat_{1}fel_{1}mego$)

A megadott kifejezést átalakítva az

$$(a-b)(b-c)(c-a)$$

kifejezést kapjuk. Ez prímszám értéket csak akkor vehet fel, ha 2 tényező 1, ill. –1, és a harmadik p v. $--p$.

$$(a-b) < 0$$
$$(b-c) < 0$$

valamint

$$|a-b| < |c-a|$$
$$|b-c| < |c-a|$$

következik a feladat állításából, tehát p ill. $--p$ csak $(c-a)$ lehet, mert az a legnagyobb abszolútértékű a három tényező közül, ezért

$$(a-b)=-1$$
$$(b-c)=-1$$
$$c=a+2$$
$$(c-a)=2$$

emiatt a 2 az egyetlen prím érték, amit a kifejezés felvehet.

53. feladat (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{3}ford_{I}kat_{1}fel$)

We have integer numbers $a<b<c<d$. We know that E is a prime and $E=(b-a)(b+c+d)(c+a+d)+(c-b)(c+a+d)(a+b+d)+(a-c)(a+b+d)(b+c+d)$. Find the value of E.

54. feladat (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{3}ford_{I}kat_{2}fel$)

Az $\boldsymbol{ABC}$ derékszögű háromszög $\boldsymbol{BC}$ befogójának D pontjában az $\boldsymbol{AD}$ szakaszra állított merőleges az $\boldsymbol{AB}$ átfogót az E pontban metszi. Az E pont $\boldsymbol{BC}$-re eső merőleges vetülete az F pont. Bizonyítsuk be, hogy a $\boldsymbol{CF}$ szakasz hossza akkor minimális, ha a D pont rajta van az A csúcsból induló szögfelezőn.

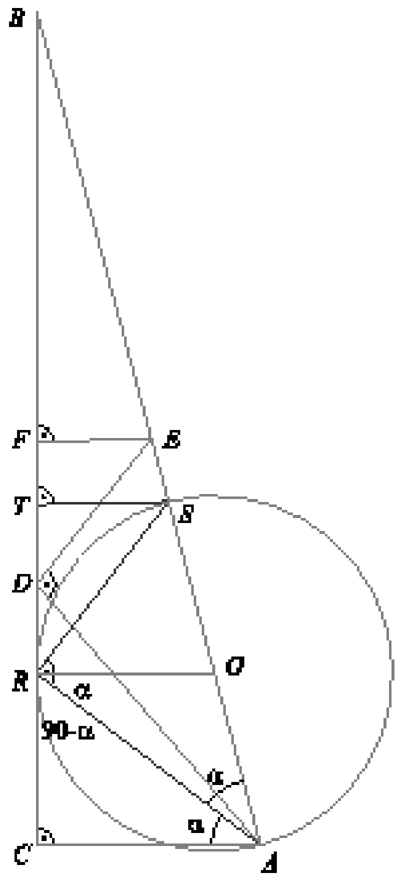
1. megoldás (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{3}ford_{I}kat_{2}fel_{1}mego$)

Az $\boldsymbol{ABC}$ háromszögben $\boldsymbol{EF}$ párhuzamos $\boldsymbol{AC}$-vel, így a párhuzamos szelők tétele szerint

$$\frac{BF}{BC}=\frac{BE}{BA}$$
$$BE=BF\frac{BA}{BC}$$

$\boldsymbol{BA/BC}$ bármilyen F és E pont esetében állandó, így $\boldsymbol{BE}$ a $\boldsymbol{BF}$ lineáris függvénye. Tehát amikor $\boldsymbol{BF}$ maximumát keressük – ami ekvivalens $\boldsymbol{CF}$ minimumának keresésével –, elég $\boldsymbol{BE}$ maximumát keresni.

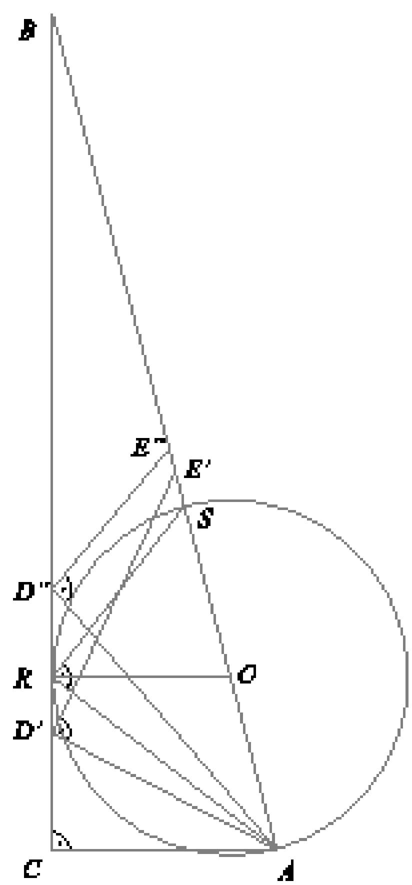
A feladat szerinti, a $\boldsymbol{BC}$ oldalon futó D pontot jelölje R, ha rajta van $\boldsymbol{CAB}\angle$ felezőjén is. Az ehhez tartozó E pont jele legyen S, F-é T.


B
F
E
T
S
D
R
O
α
90-α
α
α
C
A

ARS háromszög derékszögű, ezért a körülírható körének a középpontja ***AS*** szakasz felezőpontja (O). Így $\boldsymbol{OAR}\angle$=$\boldsymbol{ORA}\angle = \alpha$.

ACR háromszög is derékszögű, és az A-nál levő szöge α, így $\boldsymbol{ARC}\angle$=90 ° -α. Ebből az következik, hogy $\boldsymbol{RO}\perp\boldsymbol{BC}$, mert $\boldsymbol{CRO}\angle$=90 ° -$\alpha+\alpha$=90 ° .

Tekintsük az ***ARS*** háromszöget, melynek az eddig elmondottak miatt ***BC*** nyilván érinti a köréírt körét (merőleges az ***OR*** sugárra és a végpontján, R-en megy át). Emiatt ha a ***BC***-n futó D pontra $D \neq R$, akkor $\boldsymbol{ADS}\angle$ <90 ° . Ekkor az ***AD***', ill. ***AD***" szakaszokra D'-ben ill. D"-ben állított merőleges ***AB***-t a ***BS*** szakaszon metszi



így a kapható ***BE*** szakaszok nem nagyobbak ***BS***-nél, és a feladat állítását bizonyítottuk.

55. feladat ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_3 ford_I kat_2 fel$)

Let ABC be a right triangle, D and E are points on leg BC and hypotenouse AB respectively such that AD and DE are perpendicular. We drop a perpendicular from E to BC, and its foot is F. Prove that the length of CF is minimal if AD is the bisector of the triangle.

56. feladat ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_3 ford_I kat_3 fel$)

a) Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan k egész szám van, amelyre k és $k+1$ is két pozitív egész szám négyzetének összegeként írható fel.

b) Igazoljuk azt is, hogy nem létezik olyan k egész szám, amelyre a k, $k+1$, $k+2$ és $k+3$ számok mindegyike felbontható két négyzetszám összegére.

1. megoldás ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_3 ford_I kat_3 fel_1 mego$)

a) A négyzetszámok legyenek a^2, b^2, c^2, d^2, így:

$$k = a^2 + b^2$$
$$k + 1 = c^2 + d^2$$

$$k + 1 - k = 1$$
$$c^2 + d^2 - a^2 - b^2 = 1$$

Ez teljesül, ha $c = 1$, valamint d, a, b olyan pitagoraszi számhármas, ahol d a legnagyobb, mert így:

$$d^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 1$$

$$c^2 + d^2 = a^2 + b^2 + 1$$
$$c^2 + d^2 - a^2 - b^2 = 1$$

Mivel a d, a, b pitagoraszi számhármast végtelen sokféleképpen választhatjuk meg, így végtelen sok olyan k egész szám létezik, amelyre a feladat állítása teljesül.

b) A négyzetszámok 4-es osztási maradéka 0 v. 1. 4 egymást követő szám között van olyan, amelynek a 4-es osztási maradéka 3. De 2 négyzetszám összegének osztási maradéka csak

$$0 + 0 = 0$$
$$0 + 1 = 1$$
$$1 + 1 = 2$$

lehet, vagyis nincs olyan k pozitív egész, amelyre a feladat állítása teljesül.

57. feladat ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_3 ford_I kat_3 fel$)

a) Prove that there are infinitely many integers k such that both k and k+1 are the sums of two perfect squares.

b) Prove that there is no such k that k, k+1, k+2, k+3 are all the sums of two perfect squares.

58. feladat ($\mathbf{AD}_K EZDOK_2 001_1 ford_I kat_1 fel$)

Solve the following inequality over the real numbers:

$$\frac{2x}{|x-3|-5} + \frac{1}{x+2} \geq 1.$$

59. feladat ($\mathbf{AD}_K EZDOK_2 001_1 ford_I kat_2 fel$)

Let $\boldsymbol{ABC}$ be a right triangle, the length of hypotenouse $\boldsymbol{AB}$ is 3. The points E and G trisect $\boldsymbol{AB}$. Determine the value of $CE^2 + CG^2$.

60. feladat ($\mathbf{AD}_K EZDOK_2 001_1 ford_I kat_3 fel$)

The natural number n is smaller than 10^6, the sums of the digits of both n and n+1 are even. How many possible values of n are there?

61. feladat ($\mathbf{AD}_K EZDOK_2 001_1 ford_I kat_4 fel$)

The sides of an acute triangle satisfy $ac = b^2 - a^2$. Prove that $\beta = 2\alpha$.

62. feladat ($\mathbf{AD}_K EZDOK_2 001_1 ford_I kat_5 fel$)

Find the integers m, n which are greater than 1, if m is a divisor of n and $m^n \leq n^m$

63. feladat ($\mathbf{AD}_K EZDOK_2 001_2 ford_I Ikat_1 fel$)

Let D be the midpoint of the arc $\boldsymbol{BC}$ (not containing A) of the circumcircle of triangle $\boldsymbol{ABC}$. The mirror image of D on line $\boldsymbol{BC}$ is E. The midpoints of $\boldsymbol{AE}$, $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{BC}$, $\boldsymbol{CA}$ are K, L, M, N respectively. Prove that K is on the circumcircle of $\boldsymbol{LMN}$.

64. feladat ($\mathbf{AD}_K EZDOK_2 001_2 ford_I Ikat_2 fel$)

Find the integer solutions of the following equation:

$x^2y^2 - x^2y - \boldsymbol{xy}^2 + \boldsymbol{xy} + x + y = \mathbf{2}$.

65. feladat ($\mathbf{AD}_K EZDOK_2 001_2 ford_I Ikat_3 fel$)

We have a set H with n elements ($n \geq \mathbf{6}$). Prove that if we can choose a few five-element subsets of H such that every subset of H with 3 elements is contained in exactly one of the chosen subsets, then $n \geq \mathbf{16}$.

66. feladat ($\mathbf{AD}_K EZDOK_2 001_2 ford_I kat_1 fel$)

Let $\boldsymbol{ABCD}$ be a quadrangle, the midpoints of $\boldsymbol{AB}$ and $\boldsymbol{CD}$ are P and Q respectively. Find a necessary and sufficient condition such that the areas of $\boldsymbol{APQD}$ and $\boldsymbol{PBCQ}$ should be equal.

67. feladat ($\mathbf{AD}_K EZDOK_2 001_2 ford_I kat_2 fel$)

Find the integer solutions of the following equation:

$$\mathbf{4}x^3 + \mathbf{2}y^3 + z^3 = \mathbf{2002}\boldsymbol{xyz}.$$

68. feladat ($\mathbf{AD}_K EZDOK_2 001_2 ford_I kat_3 fel$)

Prove that one can choose a few four-element subsets of the vertices of a cube such that taking any 3 vertices of the cube they are contained in exactly one of the chosen subsets.