1. feladat $(\mathbf{AD}_{H}ALADOK_2 001_1 ford_I IIkat_1 fel)$

Bizonyítsuk be, hogy ha az *a, b, c* valós számokra teljesül az

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$

összefüggés, akkor

$$\frac{1}{a^{1001}}+\frac{1}{b^{1001}}+\frac{1}{c^{1001}}=\frac{1}{a^{1001}+b^{1001}+c^{1001}}.$$

1. megoldás $(\mathbf{AD}_{H}ALADOK_2 001_1 ford_I IIkat_1 fel_1 mego)$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$

$$(a+b+c)(ac+ab+bc)=abc$$

Kibontjuk

$$\mathbf{3}\boldsymbol{abc}\ \mathbf{+}\ a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b\ \mathbf{=}\ \boldsymbol{abc}$$

Szorzattá alakítjuk

$$(a+b)(a+c)(b+c)=0$$

A szorzat akkor 0, ha a valamelyik tényezője 0. Legyen ez az (a+b)

$$a=-b$$

$$\frac{1}{a^{2001}}+\frac{1}{b^{2001}}+\frac{1}{c^{2001}}=\frac{1}{a^{2001}+b^{2001}+c^{2001}}$$

Mert a^{2001}**=**$-b^{2001}$**, tehát ebből azonosságot kapunk.**

2. feladat $(\mathbf{AD}_{H}ALADOK_2 001_1 ford_I IIkat_1 fel)$

Let a**,** b**,** c **be real numbers such that** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$**. Prove that**

$$\frac{1}{a^{1001}}+\frac{1}{b^{1001}}+\frac{1}{c^{1001}}=\frac{1}{a^{1001}+b^{1001}+c^{1001}}.$$

3. feladat ($\mathbf{AD}_{H}ALADOK_{2}001_{1}ford_{I}IIkat_{2}fel$)

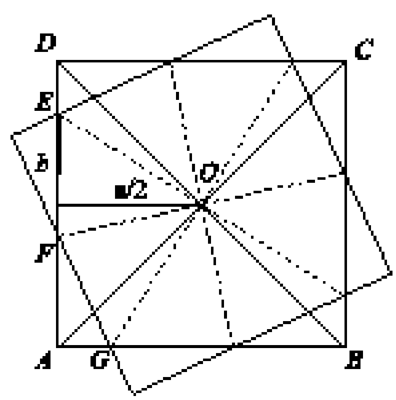
Az a oldalú Nnégyzetet a középpontja körül elforgatva az N' négyzetet kapjuk. A két négyzet közös része olyan nyolcszög, amelynek mindegyik oldala b hosszú.

a) Fejezzük ki a nyolcszög területét a-val és b-vel!

b) Ha az N és N' négyzet metszetének területe$t$, uniójának területe pedig T, akkor igazoljuk, hogy

$$\sqrt{t \cdot T} < a^2 < \sqrt{\frac{t^2 + T^2}{2}}.$$

1. megoldás ($\mathbf{AD}_{H}ALADOK_{2}001_{1}ford_{I}IIkat_{2}fel_{1}mego$)



OEF **háromszög egybevágó** ***OFG*** **háromszöggel, mert** ***OF*** **mindkettőben benne van,** ***OG=OE*** O **körüli 90 fokos forgatás miatt, és** ***EF = FG*** **a feltétel miatt.**

$$T_{nyolcsz\ddot{o}g} = T_{OFE} * 8 = \frac{ab}{4} * 8 = 2ab$$

$$T = 2a^2 - 2ab$$

$$t = 2ab$$

$$\frac{T+t}{2} = a^2$$

mértani közép:

$$\sqrt{Tt}$$

számtani közép:

$$\frac{T+t}{2}$$

$$\sqrt{Tt} < \frac{T+t}{2} < \sqrt{\frac{T^2+t^2}{2}}$$

A mértani, számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenség miatt (t≠T).

4. feladat (**AD**$_H ALADOK_2 001_1 ford_I IIkat_2 fel$)

The side of square N is denoted by a. Rotating N around its centre we get N'. The common part of the two squares is an octogon. Each side of this octogon has length b.

a) Determine the area of the octogon in terms of a and b.

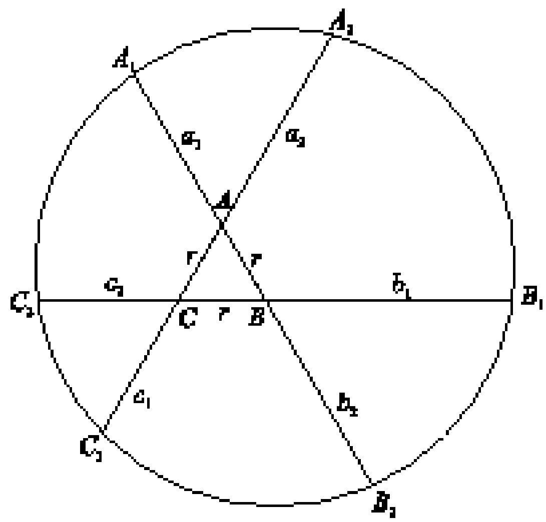
b) The area of the intersection of N and N' is t, the area of the union of N and N' is T. Prove that $\sqrt{t \cdot T} < a^2 < \sqrt{\frac{t^2+T^2}{2}}$.

5. feladat (**AD**$_H ALADOK_2 001_1 ford_I IIkat_3 fel$)

A k kör belsejében levő $\boldsymbol{ABC}$ szabályos háromszög oldalegyenesei ak kört az $A_{1,}A_2$, B_1, B_2, C_1,C_2 pontokban metszik a következő betűzés szerint: az $\boldsymbol{AB}$ oldalegyenes metszéspontjai a körrel A_1 és B_2. Hasonlóan: a $\boldsymbol{BC}$ egyenes metszetei a körrel B_1, illetve C_2, és a $\boldsymbol{CA}$ egyenes metszetei a körrel C_1, illetve A_2 az ábrának megfelelően.

Bizonyítsuk be, hogy

$$\boldsymbol{AA}_1 + \boldsymbol{BB}_1 + \boldsymbol{CC}_1 = \boldsymbol{AA}_2 + \boldsymbol{BB}_2 + \boldsymbol{CC}_2.$$



1. megoldás (**AD**$_{H}ALADOK_{2}001_{1}ford_{I}IIkat_{3}fel_{1}mego$)

Tekintsük A, B, C pontoknak a k körre vonatkozó hatványát. Eszerint:

$$a_1(r+b_2)=a_2(r+c_1)$$

$$b_1(r+c_2)=b_2(r+a_1)$$

$$c_1(r+a_2)=c_2(r+b_1)$$

Az egyenleteket összeadva és kibontva:

$a_1r+a_1b_2+b_1r+b_1c_2+c_1r+c_1a_2=a_2r+a_2c_1+b_2r+b_2a_1+c_2r+c_2b_1$

$r(a_1+b_1+c_1)=r(a_2+b_2+c_2)$

$r\neq 0$ **mert háromszög oldal, ezért**

$a_1+b_1+c_1=a_2+b_2+c_2$

és ezt kellett bizonyítani.

6. feladat (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{1}ford_{I}IIkat_{3}fel$)

We have six points on a circle in the following order: $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$**.** $A_1B_2\cap A_2C_1=A$**,** $B_1C_2\cap B_2A_1=B$**,** $C_1A_2\cap C_2B_1=C$**. We know that triangle** $\boldsymbol{ABC}$ **is equilateral. Prove that**

$$AA_1+BB_1+CC_1=AA_2+BB_2+CC_2.$$

7. feladat ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_1 ford_I IIkat_4 fel$)

121 darab pozitív egész számról tudjuk, hogy összegük 360. Bizonyítsuk be, hogy az adott 121 darab pozitív egész szám közül ki lehet néhányat választani úgy, hogy a kiválasztott számok összege 120 legyen.

1. megoldás ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_1 ford_I IIkat_4 fel_1 mego$)

A számok: a_1, a_2, a_3, a_4, ... , a_{121}

Készítünk 121 csoportot :

a_1

$a_1 + a_2$

$a_1 + a_2 + a_3$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

.

.

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{121}$

Ha nézzük ennek a 121 csoportnak a 120-as maradékait, akkor a skatulya elv szerint biztosan van két azonos maradékú. Mivel nincs két azonos összegű csoport, a két azonos maradékút kivonva egymásból a 120-as maradék 0 lesz. Ez a maradék vagy 120 és ekkor készen vagyunk, vagy 240 akkor pedig a kivonás után maradt halmaz komplementere jó, hiszen az összeg 360.

8. feladat ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_1 ford_I IIkat_4 fel$)

We have 121 positive integers, the sum of which is 360. Prove that we can choose a few of them such that the sum of the chosen numbers is 120.

9. feladat ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_1 ford_I Ikat_1 fel$)

Let x, y be real numbers such that $\boldsymbol{x+y+xy}$ is rational and $x^4 + y^4$ is irrational. Prove that $\boldsymbol{xy}$ is irrational.

10. feladat ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_1 ford_I Ikat_2 fel$)

Let $\boldsymbol{ABCD}$ be a circumscribed quadrilateral such that $\boldsymbol{AB}$ is parallel to $\boldsymbol{CD}$ and $BOC\angle = AOD\angle = 120°$. Prove that if the radius of the circumcircle is 1 then the area of $\boldsymbol{ABCD}$ is at most $\sqrt{3}$.

11. feladat (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{1}ford_{I}Ikat_{3}fel$)

Let $f(x) = x^2 - 4|x-1| - p$ be a function over the real numbers, where p is a real parameter. There are exactly three values of x such that $f(x)$=1. Determine the value of p.

12. feladat (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{1}ford_{I}Ikat_{4}fel$)

Prove that among any 2001 consecutive positive integers one can always find a number for which the sum of the digits is divisible by 27.

13. feladat (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{1}ford_{I}Ikat_{5}fel$)

We put 120 unit squares inside a 20×25 rectangle. Prove that we can also put a circle of unit diameter inside the rectangle which has no common inner point with the squares.

14. feladat (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{1}ford_{I}kat_{1}fel$)

Bizonyítsuk be, hogy minden 0 < a **< 1 számra**

$$\frac{\mathbf{2000^2}}{(\mathbf{1}-a)} + \frac{\mathbf{1}}{a} \geq \mathbf{2001}^{\mathbf{2}.Milyen}$$

a -$ra\acute{a}llfennegyenl\H{o}s\acute{e}g$?

1. megoldás (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{1}ford_{I}kat_{1}fel_{1}mego$)

Szorozzunk fel (1-a) $\cdot$ a**-val! (mivel 0<** a **<1, emiatt sem**a**,sem 1-**a **nem lehet 0; ráadásul nem változik az egyenlőtlenség iránya sem, hisz (1-**a) $\cdot$ a**pozitív)**

$$2000^2 \cdot a + 1 - a \geq 2001^2 \cdot a - 2001^2 \cdot a^2$$

$$1 - a \geq a \cdot \left(2001^2 - 2000^2\right) - 2001^2 \cdot a^2$$

$$1 - a \geq a \cdot (2001 + 2000)\,(2001 - 2000) - 2001^2 \cdot a^2$$
$$1 \geq 4002 \cdot a - 2001^2 \cdot a^2$$
$$(2001 \cdot a - 1)^2 \geq 0$$

Ez viszont természetesen mindig teljesülni fog. Egyenlőség csak akkor lehet, ha

$$1 = 2001 \cdot a$$

Vagyis ha

$$a = \frac{1}{2001}.$$

15. feladat (AD$_H ALADOK_2 001_1 ford_I kat_1 fel$)

Prove that if 0< a **<1 then**

$$\frac{2000^2}{1-a} + \frac{1}{a} \geq 2001^2.$$

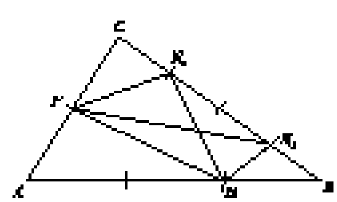
Find the values of a when equality holds.

16. feladat (AD$_H ALADOK_2 001_1 ford_I kat_2 fel$)

Az *ABC* háromszög *AB* oldalának B**-hez közelebbi harmadolópontja** H, **a *BC* oldal** B**-hez legközelebbi negyedelőpontja** N_1, C**-hez legközelebbi negyedelőpontja** N_2. **A *CA* oldal felezőpontja** F.

Bizonyítsa be, hogy az *FHN*$_1$ és az *FHN*$_2$ háromszögek területének összege az *ABC* háromszög területének felével egyenlő!

1. megoldás (AD$_H ALADOK_2 001_1 ford_I kat_2 fel_1 mego$)



A háromszög területe legyen T.
Az $\boldsymbol{FHN}_1$ háromszög területe:

$$T_{FHN_1} = T_{ABC} - T_{AHF} - T_{HBN_1} - T_{FCN_1}$$

$$T_{AHF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} T = \frac{1}{3} T$$

$$T_{HBN_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} T = \frac{1}{12} T$$

$$T_{FCN_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} T = \frac{3}{8} T$$

Ezeket behelyettesítve:

$$T_{FHN_1} = \frac{5}{24} T$$

Az $\boldsymbol{FHN}_2$ háromszög területe:

$$T_{FHN_2} = T_{ABC} - T_{AHF} - T_{HBN_2} - T_{FCN_2}$$

$$T_{AHF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} T = \frac{1}{3} T$$

$$T_{HBN_2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} T = \frac{1}{4} T$$

$$T_{FCN_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} T = \frac{1}{8} T$$

Ezeket behelyettesítve:

$$T_{FHN_2} = \frac{7}{24} T$$

Tehát a két háromszög területének összege 12/24T vagyis valóban az $\boldsymbol{ABC}$ háromszög területének fele.

17. feladat (AD$_H ALADOK_2 001_1 ford_I kat_2 fel$)

On the sides $\boldsymbol{AB}$ and $\boldsymbol{CA}$ of triangle $\boldsymbol{ABC}$ there are H and F respectively such that $\boldsymbol{AH}$:$\boldsymbol{HB}$=2:1 and $\boldsymbol{CF}$:$\boldsymbol{FA}$=1:1. On the side $\boldsymbol{BC}$ we have N_1 and N_2 such that $\boldsymbol{BN}_1$:N_1C=$\boldsymbol{CN}_2$:N_2B=1:3.

Prove that the sum of the areas of $\boldsymbol{FHN}_1$ and $\boldsymbol{FHN}_2$ is half of the area of $\boldsymbol{ABC}$.

18. feladat (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{1}ford_{I}kat_{3}fel$)

Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$(x^2+y^2)^3 = (x^3-y^3)^2$$

egyenletet!

1. megoldás (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{1}ford_{I}kat_{3}fel_{1}mego$)

Bontsuk ki a zárójeleket!

$x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6 = x^6 - 2x^3y^3 + y^6$

Továbbrendezve:

$x^2y^2(3x^2+ 3y^2+ 2xy) = 0$

Egy szorzat akkor lehet 0, ha valamelyik tényezője 0.

a) $x=0$

b) $y=0$

c) $3x^2 + 3y^2 + 2xy = 0$

c) $(x+y)^2 + 2x^2 + 2y^2 = 0$

Csak akkor lehet, ha $x = y = 0$.

Tehát az egyenlőség akkor áll fenn, ha x **vagy** $y = 0$. **Ekkor a másik bármi lehet.**

19. feladat (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{1}ford_{I}kat_{3}fel$)

Find the real solutions:

$$\left(x^2+y^2\right)^3 = \left(x^3-y^3\right)^2.$$

20. feladat (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{1}ford_{I}kat_{4}fel$)

Bizonyítsuk be, hogy 2001 egymást követő pozitív egész szám között mindig van olyan, amelyre igaz, hogy a számjegyeinek összege osztható 27-tel!

1. megoldás (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{1}ford_{I}kat_{4}fel_{1}mego$)

Ha 0 a kijelölt 2001 szám között van, akkor az állítás triviális. Ha 0 nincs a kijelölt számok között, akkor vagy csak pozitív, vagy csak negatív elmei vannak a meghatározott 2001 hosszú számsornak. Ezen két eset között csak előjelbeli különbség van, oszthatósági szempontból azonosak, ezért

elegendő pozitív számokra vizsgálni az állítást. Az egymást követő 2001 szám között biztosan van a következőképpen megadható két szám: $k\times 1000$; $k\times 1000+999$, különben az intervallum hossza maximum. 1998 lenne. Azt állítjuk, hogy ezen két szám közötti számok számjegyösszege 27-tel osztva teljes maradékrendszert ad. Ehhez elegendő azt belátnunk, hogy 0-tól 999-ig minden maradék előfordul 27-tel osztva, hiszen „$k\times 1000$" számjegyösszegét hozzáadva ehhez a teljes maradékrendszerhez, teljes maradékrendszert kapunk. Ez az állítás pedig nyilvánvalóan igaz, pl. 0-9, 90-99, 990-999-ig minden maradék előfordul.

21. feladat (AD$_H ALADOK_2 001_1 ford_I kat_4 fel$)

Prove that among any 2001 consecutive positive integers one can always find a number for which the sum of the digits is divisible by 27.

22. feladat (AD$_H ALADOK_2 001_1 ford_I kat_5 fel$)

Egy 20x25-ös téglalapban elhelyeztünk tetszőlegesen 120 db egységnyi oldalú négyzetet. Bizonyítsuk be, hogy még egy olyan egységnyi átmérőjű kör is elfér a téglalapban, amelynek nincs közös belső pontja a négyzetekkel! (Négyzeten most négyzetlapot, körön most körlapot értünk.)

1. megoldás (AD$_H ALADOK_2 001_1 ford_I kat_5 fel_1 mego$)

Vizsgáljuk azt, hogy hol helyezkedhet el a keresett kör középpontja! Ha be tudjuk bizonyítani, hogy a négyzetek letevése után is lesz hely a kör középpontjának, akkor készen vagyunk.

a) A négyzetek oldalához 1/2-nél nem lehet közelebb a középpont.

Egy négyzet által letiltott terület:

$$1 + 4 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \pi = 3 + \frac{\pi}{4}.$$

b) A téglalap kerületéhez 1/2-nél nem lehet közelebb:

Ez

$$18 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + 25 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 43$$

egységnyi területet tilt le.

Tehát a maximálisan letiltható terület:

$$120 \cdot (3 + \frac{\pi}{4}) + 43 \leq 498.$$

Vagyis a maximálisan letiltható terület nagysága kisebb, mint 500. Tehát lesz hely a kör középpontjának, vagyis elhelyezhető lesz.

23. feladat (AD$_H ALADOK_2 001_1 ford_I kat_5 fel$)

We put 120 unit squares inside a 20×25 rectangle. Prove that we can also put a circle of unit diameter inside the rectangle which has no common inner point with the squares.

24. feladat (AD$_K EZDOK_2 001_1 ford_I kat_1 fel$)

Solve the following inequality over the real numbers:

$$\frac{2x}{|x-3|-5} + \frac{1}{x+2} \geq 1.$$

25. feladat (AD$_K EZDOK_2 001_1 ford_I kat_2 fel$)

Let *ABC* be a right triangle, the length of hypotenouse *AB* is 3. The points E and G trisect *AB*. Determine the value of $CE^2 + CG^2$.

26. feladat (AD$_K EZDOK_2 001_1 ford_I kat_3 fel$)

The natural number n is smaller than 10^6, the sums of the digits of both n and n+1 are even. How many possible values of n are there?

27. feladat (AD$_K EZDOK_2 001_1 ford_I kat_4 fel$)

The sides of an acute triangle satisfy $ac = b^2 - a^2$. Prove that $\beta = 2\alpha$.

28. feladat (AD$_KEZDOK_2001_1ford_Ikat_5fel$)

Find the integers m, n which are greater than 1, if m is a divisor of n and $m^n \leq n^m$