1. feladat ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_2 ford_I IIkat_1 fel$)

Bizonyítsuk be, hogy az összes olyan pozitív egész alapú számrendszerben, amelyben az $\overline{abc}$ és a $\overline{cba}$ pozitív egész szám hányadosa 2, teljesül az $a + c = b$összefüggés.

1. megoldás ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_2 ford_I IIkat_1 fel_1 mego$)

$\overline{abc} = 2\overline{cba}$ **a** k**-as számrendszerben** ($k \geq 2$; **egész) Eszerint** $a > c$.

$$(1)\ (\boldsymbol{ck}^{\,2} + \boldsymbol{bk} + a)\cdot\mathbf{2} = \boldsymbol{ak}^2 + \boldsymbol{bk} + c$$

Ha 2$a \equiv \quad c\ (k)$ **és** $k > \quad a > \quad c >$ **0 akkor**

$$(2)\ \mathbf{2}a = k + c$$

Ekkor

$$(3)\ \mathbf{2}b + \mathbf{1} = k + b$$

és

$$(4)\ \mathbf{2}c + \mathbf{1} = a$$

mert

$$\mathbf{2}\boldsymbol{ck}^2 + \mathbf{2}\boldsymbol{bk} + \mathbf{2}a = \boldsymbol{ak}^2 + \boldsymbol{bk} + c$$

levonva (2)-t

$$\mathbf{2}\boldsymbol{ck}^2 + \mathbf{2}\boldsymbol{bk} = \boldsymbol{ak}^2 + (b\text{–}\mathbf{1})k/\mathbf{:}k\ (k\textbf{nem 0})$$

Ebből 2$b \equiv (b\text{–}\mathbf{1})k \quad k > \quad b >$ **0 Így megkapjuk (3)-at.**

$$\mathbf{2}\boldsymbol{ck} + \mathbf{2}b = \boldsymbol{ak} + b - \mathbf{1}\ /\text{–}(\mathbf{3})$$

$$\mathbf{2}\boldsymbol{ck} - \mathbf{1} = (a - \mathbf{1})k - \mathbf{1}\ /+\mathbf{1},\ \mathbf{:}k$$

$$\mathbf{2}c = a - \mathbf{1}$$

(2)-ből kifejezve k**-t:**

$k = \mathbf{2}a - c$

$$\mathbf{2}b + \mathbf{1} = \mathbf{2}a - c + b$$

$b = \mathbf{2}a - \mathbf{c} - \mathbf{1}$

$b = a + \quad a - \mathbf{c} - \mathbf{1}$

(4)-ből kifejezve c-t:

$c = a - \mathbf{c} - \mathbf{1}$

Ezt behelyettesítve

$b = a + c$

Tehát az állítás igaz minden $k \geq 2$-es, egész, számrendszerben.

2. feladat $(\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_2 ford_I IIkat_1 fel)$

We take two numbers in base k: $\overline{abc}$ and $\overline{cba}$. Prove that if $\overline{abc}$=2$\overline{cba}$, then $a + c = b$.

3. feladat $(\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_2 ford_I IIkat_2 fel)$

Adott egy $2k$+1 alakú szabályos sokszög, melyek belsejében vagy határán felveszünk egy P pontot. P-nek a sokszög csúcsaitól mért távolságát jelölje (nagyság szerinti sorrendben)

$$d_1 \leq d_2 \leq ... \leq d_{2k+1}.$$

Milyen P pont esetén lesz d_{k+1} maximális?

1. megoldás $(\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_2 ford_I IIkat_2 fel_1 mego)$

Húzzuk meg a sokszög minden oldalának felezőmerőlegesét. Mivel a sokszög szabályos ezek egy pontban metszik egymást, ez legyen M.Legyen P pont az A_1F_1M háromszögben, így P pont összes elhelyezkedését vizsgáljuk, hiszen biztos benne lesz egy ilyen derékszögű háromszögben.

P pont akárhol helyezkedik el ebben a $\mathbf{T}_1$ tartományban, ha

$$d_i \geq d_j$$

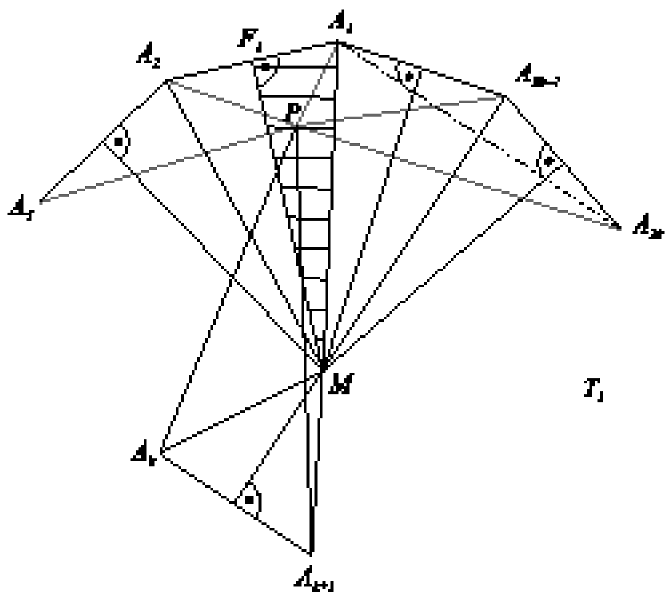
akkor bármilyen másik helyzete esetén is

$$d_i \geq d_j$$

$$\boldsymbol{PA}_1 = d_1,\ \boldsymbol{PA}_2 = d_2,\ \boldsymbol{PA}_{2k+1} = d_3,\ \boldsymbol{PA}_3 = d_4,\ \boldsymbol{PA}_{2k} = d_5$$

Hiszen P pont a sokszög „bal felén" van és

A_kA_{k+1} párhuzamos $A_{k-1}A_{k+2}$ párh. . . . . . A_1A_{2k}valamint párhuzamos A_2A_{2k+1}-gyel.



Valamint ahhoz, hogy megnézzük, hogy $\boldsymbol{PA}_i$ és $\boldsymbol{PA}_j$ közül melyik nagyobb, meg kell nézni hogy A_iA_j felezőmerőlegesének melyik partjára esik P. Tehát

$$PA_1 \leq PA_2 \leq PA_{2k+1} \leq ... \leq PA_k \leq PA_{k+1}$$

Ha k páros akkor d_{k+1} szakasz végpontja (nem P) a sokszög ,,jobb oldali" részén van, legyen A_tMost ekkor a csúcshoz kell megtalálni azt a P pontot melyre d_{k+1}maximális. Ez pedig akkor teljesül, ha P pont F_1A_1-en van és innen F_1van legtávolabb A_t-től, hiszen A_1F_1 felezőmerőlegese a síkot két olyan félsíkra bontja, hogy A_1 és A_t egy félsíkra esik. Tehát ha k páros, akkor P pontot az oldalfelező pontba kell tenni hogy d_{k+1}maximális legyen.

Ha k páratlan, akkor d_{k+1} szakasz végpontja (nem P) a sokszög ,,bal oldali" részén van. Ekkor P pontnak A_1M-en kell lennie, hogy d_{k+1} maximális legyen. Mivel A_1M felezőmerőlegesének az M-et tartalmazó partján van A_t, ezért A_1-be kell rakni P-t hogy d_{k+1}maximális legyen.

Tehát ha k páros,P az oldalfelező ponton, ha k páratlan P a csúcsban van.

4. feladat ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_2 ford_I IIkat_2 fel$)

P is either on the perimeter or inside a regular $2k+1$-gon. Let d_i denote the distance of P from the vertices of the $2k+1$-gon in an increasing order $d_1 \leq d_2 \leq ... \leq d_{2k+1}$. For which P shall we get the maximal d_{k+1}?

5. feladat ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_2 ford_I IIkat_3 fel$)

Van N darab chip, amelyek képesek egymás tesztelésére a következő módon: ha kettőt összekapcsolunk, akkor mindkettő kijelzi a másik chipről, hogy jó e vagy hibás. A jó chip mindig helyesen válaszol, a hibás chip véletlenszerű eredményt ad. Tudjuk. Hogy az összes chipnek több mint a fele jó. Lehetséges-e N-nél kevesebb teszt végrehajtásával kiválasztani egy jó chipet?

1. megoldás ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_2 ford_I IIkat_3 fel_1 mego$)

Ha N páros, akkor legalább 2-vel több jó chip van, tehát ha egyet eldobunk a többség megmarad. Ha páratlan sok van, nem nyúlunk hozzá. Egy darab kivételével párba rendezzük őket. Ha a párban olyan a válasz, hogy a másik rossz, akkor a kettő között biztosan van rossz, hiszen ez két jónál nem fordulhat elő. Ha nincs, akkor vagy mindkettő jó, vagy mindkettő rossz. Vegyes páros nem fordulhat elő, hiszen a jó rossznak találná a hibásat.

Azokat a párokat, melyekben volt olyan válasz, hogy a másik rossz, félretesszük. Mivel legalább annyi hibásat tettünk félre, mint hibátlant, ezért jóból továbbra is több maradt.

A maradék páratlan számú. Az nyilvánvaló, hogy legalább annyi jó van, mint rossz.

I. Páratlan számú pár van. Ekkor elveszünk minden pár egy tagját és a mérésből kimaradtat.

II. Páros számú pár van. Elveszünk minden pár egy tagját.

Egyszerűen belátható, hogy mindkét esetben ugyanazt

kaptuk ismét, hogy páratlan számú chipünk van, és több jó van közöttük. Ezt a műveletsort többször elvégezzük. Ekkor k db. mérés után legalább k db-bal csökken a bennmaradtak száma, így a műveletet véges sokszor elvégezve legfeljebb N-1 méréssel készen vagyunk, 1 db jó chip marad.

6. feladat (**AD**$_H ALADOK_2 001_2 ford_I IIkat_3 fel$)

We have N chips, they are able to test each other in the following way. Connecting two of them, each will indicate whether the other one is good or not. A good chip always gives a correct answer, a wrong one answers randomly. At least half of the chips are good. Is it possible to choose a good chip by testing less than N times?

7. feladat (**AD**$_H ALADOK_2 001_2 ford_I Ikat_1 fel$)

Oldjuk meg az egész számok körében az

$$\boldsymbol{ab + cd = -1}$$

$$\boldsymbol{ac + bd = -1}$$

$$\boldsymbol{ad + bc = -1}$$

egyenletrendszert!

1. megoldás (**AD**$_H ALADOK_2 001_2 ford_I Ikat_1 fel_1 mego$)

Páronként összeadjuk az egyenlőségek megfelelő oldalait:

(1)+(2): $\boldsymbol{ab + ac + cd + bd} = (a+d)(b+c) = \boldsymbol{-2}$ **(4)**

(1)+(3): $\boldsymbol{ab + ad + cd + bc} = (\mathbf{a} + c)(b+d) = \boldsymbol{-2}$ **(5)**

(2)+(3): $\boldsymbol{ac + ad + bd + bc} = (a+b)(c+d) = \boldsymbol{-2}$ **(6)**

A 6 darab kéttagú összeg mindegyikének abszolútértéke 1 vagy 2 (mivel a, b, c, d egészek). Különböztessünk meg eseteket a, b, c, d előjele szempontjából! Nyilvánvalóan nem lehet mind a 4 szám pozitív, vagy mind negatív, ekkor a jobboldal mindenütt pozitív lenne.

a) 3 darab negatív: 2 negatív összege nem lehet kisebb –2-nél, így (mivel minden lehetséges párosítás létrejön (4), (5), (6)-ban), mind a 3 darab –1-gyel egyenlő. Ekkor a 4. szám csak 1–(–1)=2 lehet.

b) 3 darab pozitív: Hasonló gondolattal jutunk az 1, 1, 1, –2 kizárólagos számnégyeshez.

c) 2 darab negatív: Az előbbiekhez hasonlóan mindkettő –1 lesz, a másik 2 db összege 1 (mivel (–2)/((–1)+(–1))=1), így (egészek lévén) 0 és 1 lesznek. Azonban 2 olyan szám nem lehet ezek közt, mert akkor egy kéttagú összeg értéke 0 lesz, (4), (5), (6) egyike 0 lenne. Mivel itt 1+(–1)=0, ezért ilyen megoldás nincs.

Tehát a 8 db megoldás:

A	b	c	d		a	b	c	d
–1	–1	–1	2		1	1	1	–2
–1	–1	2	–1		1	1	–2	1
–1	2	–1	–1		1	–2	1	1
2	–1	–1	–1		–2	1	1	1

Ezek valóban kielégítik az eredeti egyenletrendszert.

8. feladat (**AD**$_HALADOK_2001_2ford_IIkat_1fel$)

Find the integer solutions:

$$ab + cd = -1$$
$$ac + bd = -1$$
$$ad + bc = -1$$

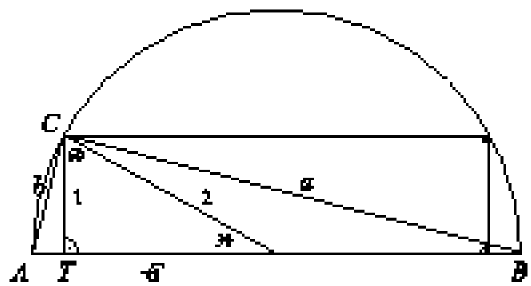
9. feladat (**AD**$_HALADOK_2001_2ford_IIkat_2fel$)

Az a és b befogójú derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága az átfogó negyedrésze. Mekkora ekkor

$$\left(\frac{a}{b}\right)^6 + \left(\frac{b}{a}\right)^6$$

értéke?

1. megoldás (AD$_HALADOK_2001_2ford_IIkat_2fel_1mego$**)**



Az átfogót négy egységnek véve az $ATC\Delta$ és a $CTB\Delta$ hasonlóságából felírhatjuk a következő arányt:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

ebből:

$$\frac{b}{a} = 2-\sqrt{3}$$

ezeket a hatodikra emelve

$$1351 - 780\sqrt{3} + \frac{1}{1351-780\sqrt{3}}$$

-at kapunk. Az utóbbit $1351 + 780\sqrt{3}$ **-al bővítve:**

$$\frac{1351+780\sqrt{3}}{1351^2 - 780^2 \cdot 3}$$

ami

$$\frac{1351+780\sqrt{3}}{1}$$

A kettő összege így

$$1351 - 780\sqrt{3} + 1351 + 780\sqrt{3} = \underline{\underline{2702}}$$

10. feladat (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{2}ford_{I}Ikat_{2}fel$)

The legs of a right triangle are a and b. The length of the altitude to the hypotenouse is the

quarter of the hypotenouse. Find the value of $\left(\frac{a}{b}\right)^6 + \left(\frac{b}{a}\right)^6$.

11. feladat (AD$_H ALADOK_2 001_2 ford_I Ikat_3 fel$)

Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c valós számokra teljesül az

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$

összefüggés, akkor

$$\frac{1}{a^{1001}} + \frac{1}{b^{1001}} + \frac{1}{c^{1001}} = \frac{1}{a^{1001} + b^{1001} + c^{1001}}.$$

1. megoldás (AD$_H ALADOK_2 001_2 ford_I Ikat_3 fel_1 mego$)

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$

$$(a+b+c)(ac+ab+bc) = abc$$

Kibontjuk

$$\boldsymbol{3abc} + a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b = \boldsymbol{abc}$$

Szorzattá alakítjuk

$$(a+b)(a+c)(b+c) = 0$$

A szorzat akkor 0, ha a valamelyik tényezője 0. Legyen ez az (a+b)

$$a = -b$$

$$\frac{1}{a^{2001}} + \frac{1}{b^{2001}} + \frac{1}{c^{2001}} = \frac{1}{a^{2001} + b^{2001} + c^{2001}}$$

Mert a^{2001}=–b^{2001}, tehát ebből azonosságot kapunk.

12. feladat (AD$_H ALADOK_2 001_2 ford_I Ikat_3 fel$)

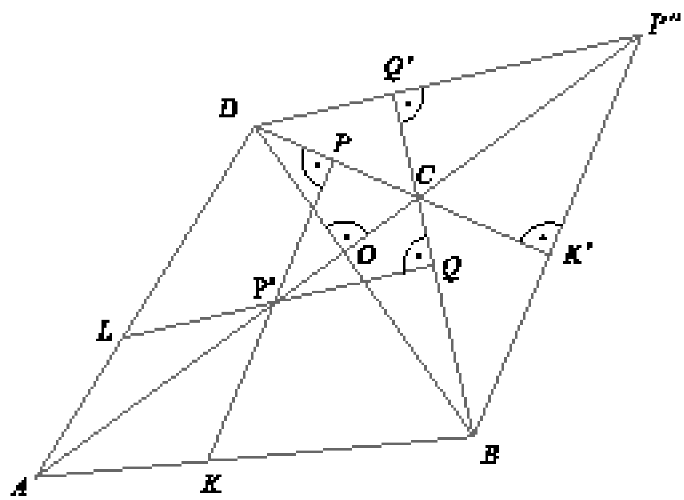
Let a, b, c be real numbers such that $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$. Prove that

$$\frac{1}{a^{1001}} + \frac{1}{b^{1001}} + \frac{1}{c^{1001}} = \frac{1}{a^{1001} + b^{1001} + c^{1001}}.$$

13. feladat (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{2}ford_{I}Ikat_{4}fel$)

Az *ABCD* konvex négyszög *AC* és *BD* átlója merőleges egymásra. Az *AB* oldal K felezőpontjából állítsunk merőlegest *DC* oldalegyenesre. Ennek talppontja legyen P. Az *AD* oldal felezőpontjából a *BC* oldalegyenesre állított merőleges talppontja legyen Q. Bizonyítsuk be, hogy a *KP* és *LQ* egyenesek az *AC* átló egyenesén metszik egymást!

1. megoldás (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{2}ford_{I}Ikat_{4}fel_{1}mego$)



A pontból nagyítsuk kétszeresére az ábrát úgy, hogy L pont D-be, K pont pedig B-be kerüljön. ***KP*** egyenesének a képe ***BP*"** egyenese, és mivel ***KP*|*BP*"**, ezért ***BK*'⊥*DK*'**. ***LQ*** egyenesének képe ***DP*"** egyenesével esik egybe, és mivel ***LQ*|*DQ*'**, ezért ***DQ*'⊥** Q'B. ***DCB*** háromszög magasságai tehát ***BK*'**, ***DQ*'**, és ***CO***, hiszen a négyszög átlói merőlegesek egymásra. Ezen 3 magasságegyenes P" pontban metszik egymást. Tehát P" a ***BCD*Δ** magasságpontja. De P" éppen P' pont nagyított képe. Ha mindent visszakicsinyítünk, P'-n tehát átmegy ***KP*** és ***LQ*** szakasz és P' rajta van ***AC***-n.

Tehát ***KP*** és ***LQ*** valóban ***AC***-n metszik egymást.

megj: Ebben a bizonyításban azt nem is használtuk ki, hogy K és L felezőpontok, csak azt, hogy ugyanolyan arányú osztópontok.

14. feladat (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{2}ford_{I}Ikat_{4}fel$)

Let $\boldsymbol{ABCD}$ be a convex quadrilateral whose diagonals, $\boldsymbol{AC}$ and $\boldsymbol{BD}$, are perpendicular. Let K be the midpoint of $\boldsymbol{AB}$. We drop a perpendicular from K to line $\boldsymbol{DC}$, and its foot is P. Let L be the midpoint of $\boldsymbol{AD}$. We drop a perpendicular from L to line $\boldsymbol{BC}$, and its foot is Q. Prove that $\boldsymbol{KP}$, $\boldsymbol{LQ}$ and $\boldsymbol{AC}$ are concurrent.

15. feladat (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{2}ford_{I}kat_{1}fel$)

Bizonyítsuk be, hogy

$$1 \bullet 2 \bullet \ldots \bullet 2001 + 2002 \bullet 2003 \bullet \ldots \bullet 4002$$

osztható 4003-mal!

1. megoldás (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{2}ford_{I}kat_{1}fel_{1}mego$)

Vizsgáljuk meg a számok 4003-mal való osztási maradékait:

$$2002 \equiv -2001\ (4003)$$

$$2003 \equiv -2000\ (4003)$$

$$2004 \equiv -1999\ (4003)$$

$$.$$

$$.$$

$$4001 \equiv -2(4003)$$

$$4002 \equiv -1(4003)$$

Majd behelyettesíthetjük a kongruenciák jobb oldalán található számokat a feladatban szereplő összeg jobb oldalába, így:

2002•2003•2004•...•4002 helyébe:

(-2001)•(-2000)•(-1999)•...•(-1).

Ekkor észrevehetjük, hogy a bal oldali szorzat 4003-as osztási maradéka (-1)-szerese a jobb oldaliénak:

$$\textbf{(-1)•1•2•}\ldots\textbf{•2001} \equiv \textbf{(-2001)•(-2000)•(-1999)•...•(-1)}\ \textbf{(4003)}$$

Mert a jobb oldalon páratlan számú negatív tag áll.
Ezért:

$$\textbf{1•2•3•}\ldots\textbf{•2001} + \textbf{(-2001)•(-2000)•(-1999)•...•(-1)} \equiv \textbf{0}\ \textbf{(4003)}$$

$$\textbf{1•2•3•}\ldots\textbf{•2001} + \textbf{2002•2003•2004•}\ldots\textbf{•4002} \equiv \textbf{0 (4003)}$$

Tehát 1•2•... •2001 + 2002•2003•... •4002 osztható 4003-mal.

16. feladat (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{2}ford_{I}kat_{1}fel$)

Prove that $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2001 + 2002 \cdot 2003 \cdot ... \cdot 4002$ **is divisible by 4003.**

17. feladat (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{2}ford_{I}kat_{2}fel$)

Oldjuk meg a természetes számok halmazán a

$$\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=10$$

egyenletet!

1. megoldás (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{2}ford_{I}kat_{2}fel_{1}mego$)

Emeljük négyzetre az egyenletet:

$$x+y+x-y+2\cdot\sqrt{(x+y)\,(x-y)}=100$$

Az egyszerűsítések után a következőt kapjuk:

$$\sqrt{x^2-y^2}=50-x$$

Látható, hogy $x \quad \leq$ **50 –nek kell teljesülnie és az egyenlet bal oldalából következik, hogy** $y \quad \leq \quad x$**, azaz** $y \quad \leq$ **50. Még egy négyzetre emelés után:**

$$x^2-y^2=50^2+x^2-100x$$

Az átalakítások elvégzésével

$$y^2 = 100x - 50^2 = 100x - 2500 = 100\,(x - 25)$$

-höz jutunk, vagyis y^2 **osztható 100-zal, így** y **10-zel lesz osztható.**

y **helyébe 10, 20, 30, 40 ill. 50-et helyettesítve**
x **értékéhez 26, 29, 34, 41 és 50 jön ki, tehát a megoldás:**
x_1**=26** x_2**=29** x_3**=34** x_4**=41** x_5**=50**
y_1**=10** y_2**=20** y_3**=30** y_4**=40** y_5**=50**

18. feladat (AD$_HALADOK_2001_2ford_Ikat_2fel$)

Solve the following equation over the natural numbers of :

$$\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 10.$$

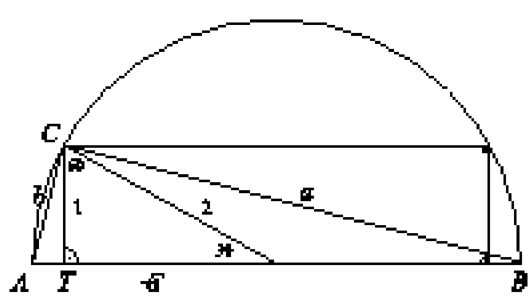
19. feladat (AD$_HALADOK_2001_2ford_Ikat_3fel$)

Az a **és** b **befogójú derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága az átfogó negyedrésze. Mekkora ekkor**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^6 + \left(\frac{b}{a}\right)^6$$

értéke?

1. megoldás (**AD**$_HALADOK_2001_2ford_Ikat_3fel_1mego$)



Az átfogót négy egységnek véve az $\boldsymbol{ATC}\Delta$ és a $\boldsymbol{CTB}\Delta$ hasonlóságából felírhatjuk a következő arányt:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

ebből:

$$\frac{b}{a} = 2-\sqrt{3}$$

ezeket a hatodikra emelve

$$1351-780\sqrt{3}+\frac{1}{1351-780\sqrt{3}}$$

-at kapunk. Az utóbbit $1351+780\sqrt{3}$ **-al bővítve:**

$$\frac{1351+780\sqrt{3}}{1351^2-780^2\cdot 3}$$

ami

$$\frac{1351+780\sqrt{3}}{1}$$

A kettő összege így

$$1351-780\sqrt{3}+1351+780\sqrt{3}=\underline{\underline{2702}}$$

20. feladat (AD$_HALADOK_2001_2ford_Ikat_3fel$)

The legs of a right triangle are a and b. The length of the altitude to the hypotenouse is the quarter of the hypotenouse. Find the value of $\left(\frac{a}{b}\right)^6+\left(\frac{b}{a}\right)^6$.

21. feladat (AD$_HALADOK_2001_2ford_Ikat_4fel$)

Egy 1 egység széles egyenes vonalzóval egy síkon szerkeszthetünk. Más segédeszközünk – ceruzán kívül – nincs. A szerkesztés során a következő lépések hajthatók végre:

a) tetszőleges számú pontot felvehetünk az adott síkon,

b) két felvett ponton át egyenes húzható a vonalzóval,

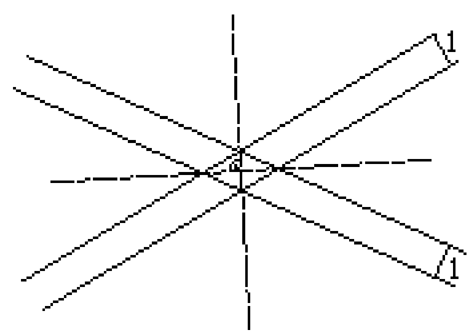
c) bármely megrajzolt egyenessel attól egységnyi távolságra lévő párhuzamos egyenes húzható.

Szerkesszünk$\sqrt{34}$ egység hosszú szakaszt a megengedett szerkesztési lépések alapján!

1. megoldás (AD$_H ALADOK_2 001_2 ford_I kat_4 fel_1 mego$)

Rajzoljunk 2 pár párhuzamos egyenest, melyek metszik egymást. Ezek egy rombuszt határoznak meg, mivel két magassága egyenlő!

A rombusz átlói merőlegesek egymásra, így a szemközti csúcsokat összekötve merőleges egyeneseket kapunk.



Az egyikre 3, míg a másikra 5 egységet mérünk fel az 1 egység széles vonalzónk segítségével. Az így keletkezett derékszögű háromszög átfogója Pitagoras tétele miatt$\sqrt{34}$egység.

22. feladat (AD$_H ALADOK_2 001_2 ford_I kat_4 fel$)

We have a ruler, whose width is 1 unit and a pencil. The following steps are allowed during construction:

a) Taking arbitrary points on the plane.

b) Drawing a straight line through any two given points.

c) Drawing a line parallel to any given line such

that their distance is 1 unit.

Construct a segment with length $\sqrt{34}$ using these allowed steps.

23. feladat ($\mathbf{AD}_K EZDOK_2 001_2 ford_I Ikat_1 fel$)

Let D be the midpoint of the arc BC (not containing A) of the circumcircle of triangle ABC. The mirror image of D on line BC is E. The midpoints of AE, AB, BC, CA are K, L, M, N respectively. Prove that K is on the circumcircle of LMN.

24. feladat ($\mathbf{AD}_K EZDOK_2 001_2 ford_I Ikat_2 fel$)

Find the integer solutions of the following equation:

$x^2y^2-x^2y-xy^2+xy+x+y=2.$

25. feladat ($\mathbf{AD}_K EZDOK_2 001_2 ford_I Ikat_3 fel$)

We have a set H with n elements ($n \geq 6$). Prove that if we can choose a few five-element subsets of H such that every subset of H with 3 elements is contained in exactly one of the chosen subsets, then $n \geq 16$.

26. feladat ($\mathbf{AD}_K EZDOK_2 001_2 ford_I kat_1 fel$)

Let $ABCD$ be a quadrangle, the midpoints of AB and CD are P and Q respectively. Find a necessary and sufficient condition such that the areas of $APQD$ and $PBCQ$ should be equal.

27. feladat ($\mathbf{AD}_K EZDOK_2 001_2 ford_I kat_2 fel$)

Find the integer solutions of the following equation:

$$4x^3+2y^3+z^3=2002xyz.$$

28. feladat ($\mathbf{AD}_K EZDOK_2 001_2 ford_I kat_3 fel$)

Prove that one can choose a few four-element subsets of the vertices of a cube such that taking any 3 vertices of the cube they are contained in exactly one of the chosen subsets.