1. feladat (AD$_H ALADOK_2 001_3 ford_I Ikat_1 fel$)

Hány olyan pozitív egész tízes számrendszerbeli n-jegyű szám van, amelynek számjegyösszege n^3 – 40, ahol n pozitív egész szám?

1. megoldás (AD$_H ALADOK_2 001_3 ford_I Ikat_1 fel_1 mego$)

A számjegyek összege legalább 1, és legfeljebb 9n. Tehát: 1 ≤ n^3–40 ≤ 9n.

A bal oldali egyenlőtlenségből:

$$n^3 \geq 41$$

$$n \geq \sqrt{41} > 3$$

Ezek szerint $n$nem lehet kevesebb 4-nél.

A jobb oldali egyenlőtlenségből:

$$n^3 - 9n \leq 40$$

n=4-re: n^3–9n=28

n=5-re: n^3–9n=80

Mivel n^3–9n=(n–3)n(n+3), így ha n-et növeljük, akkor mindhárom tag nőni fog, és így a szorzatuk is (poz. n-re). Valamint n^3–9n folytonos függvény, amely így szigorúan monoton nő, ezért a 40-et csupán egyszer veszi fel.

Ezért n nem lehet több 4-nél.

A két megállapításból következik, hogy a keresett szám csak négyjegyű lehet. Ekkor a számjegyek összege 24.

Keressük meg az összes olyan 4 nemnegatív tagú összeget, ahol a tagok növekvő sorrendben vannak, és az összeg 24. (A tagok egészek)

Az első ilyen a 9+9+6+0. A következő a 9+9+5+1. A 9+9 kezdetűekből az utolsó 9+9+3+3. Ezután folytatjuk a 9+8 kezdetűekkel. Az utolsó 9 kezdetű a 9+5+5+5. A 8 kezdetűekkel folytatjuk. Az utolsó számnégyes a 6+6+6+6. Összesen 39 számnégyes van. Egy számnégyesből legfeljebb 4!=24 db négyjegyű szám állítható elő, ha 4 különböző számjegy van, és nincs köztük 0-ás. 18 db szám (3·3·2·1) ha van 0-ás és 4 különböző. 2 egyforma számjegy van, és van 0-ás, akkor 9 db, ha nincs, akkor 12 db. 2-2 egyforma számjegy van, akkor nincs 0; 4 alatt a 2= 6db szám. Ha

3 egyforma, és van 0-ás, akkor 3db; ha nincs, 4db. 4 egyforma számjegyből csak 1 szám állítható össze. Ez összesen 405 db számot ad.

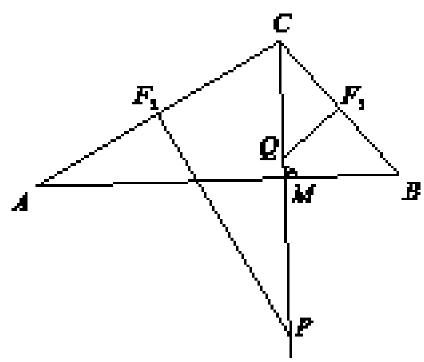
2. feladat ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_3 ford_I Ikat_1 fel$)

How many numbers are there which have n digits and the sum of the digits is n^3–40? (n is a positive integer.)

3. feladat ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_3 ford_I Ikat_2 fel$)

$\boldsymbol{ABC}$ háromszögben $\boldsymbol{BC} < \boldsymbol{CA} < \boldsymbol{AB}$. A $\boldsymbol{BC}$ oldal felezőmerőlegese Q-ban, az $\boldsymbol{AC}$ oldal felezőmerőlegese P-ben metszi a C-ből induló magasság egyenesét. Mekkora a háromszög legnagyobb szöge, ha $4\boldsymbol{PC}\cdot\boldsymbol{CQ}=\boldsymbol{AB}^2$?

1. megoldás ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 001_3 ford_I Ikat_2 fel_1 mego$)



$F_1\boldsymbol{CQ}$ Δ hasonló az $\boldsymbol{MBC}\Delta$ -hez, hiszen C-nél lévő szögük közös, valamint mindkettő derékszögű. Innen:

$$\frac{F_1C}{CQ} = \frac{CM}{BC}, \;\; F_1C = \frac{BC}{2}$$

miatt

$$2CQ = \frac{BC^2}{CM}.$$

Hasonlóképpen elmondható, hogy $F_2\boldsymbol{PC}$ Δ hasonló $\boldsymbol{AML}$

Δ-höz, amiből rövid számolás után:

$$2CP = \frac{AC^2}{CM}$$

adódik.

Összeszorozva a két egyenletet:

$$4 \cdot CP \cdot CQ = \frac{AC^2 \cdot BC^2}{CM^2},$$

azaz az eredeti feltétel szerint

$$\frac{AC^2 \cdot BC^2}{CM^2} = AB^2.$$

$AC^2 \cdot BC^2 = AB^2 \cdot CM^2$ ahol nyilván a jobb oldal a terület kétszeresének négyzete.

Tehát $AC \cdot BC = 2T$, vagyis AC és BC bezárt szöge 90 ˚ , ami szükségszerűen az ABC háromszög legnagyobb szöge.

4. feladat (AD$_HALADOK_2001_3ford_IIkat_2fel$)

In triangle ABC the following holds: $BC<CA<AB$. Line e is perpendicular to AB and goes through C. The perpendicular bisectors of BC and AC meet e at P and Q respectively. Determine the greatest angle of the triangle if $4CP \cdot CQ = AB^2$.

5. feladat (AD$_HALADOK_2001_3ford_IIkat_3fel$)

Tekintsük az 1,2,3,...,2002 számsorozatot! Ezt a sorozatot átrendezhetjük a következő módon: egy lépésben a sorozat utolsó tagját előbbre helyezhetjük (akárhányadik helyre az 1.,2.,3.,...2002. sorszámú hely közül) azzal a megszorítással, hogy az előrébb helyezett tag nem előzhet meg nála nagyobb számot. A kapott új sorozatra ismét alkalmazható az előbb leírt lépés, egészen addig, amíg lehetséges. Bizonyítsuk be, hogy bármely lépés után olyan sorozatot kapunk, amelyben a $(2k -$

1)-edik és a 2k-adik tag közül az egyik páros a másik pedig páratlan szám, bármely 1 $\leq k \leq$ 1001 esetén.

1. megoldás (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{3}ford_{I}Ikat_{3}fel_{1}mego$)

Ha a 2002-t előbbre helyezzük, akkor még egyszer nem kerülhet utolsónak, hiszen kisebb szám nem kerülhet nagyobb elé. Hasonlóan minden számot maximum egyszer helyezhetünk előrébb. Ezért véges sok lépés után már nem lehetséges áthelyezés. Képzeljük a számokat kettesével egy skatulyába, az elsőbe az 1 és a 2, ... az utolsóba a 2001 és a 2002 kerül. Minden skatulya, melybe tehető a 2002, páratlan számmal kezdődik. Ha 0 2002-t áthelyezzük valamelyik skatulyába, abban a 2002-n kívül egy db páratlan szám lesz, és azok a skatulyák, melyekbe a következő lépésben a 2001-be rakható párossal kezdődnek és páratlannal végződnek. Innen ugyan úgy folytatható az eljárás, mint az előbb, így minden lépés után minden skatulyában egy páros és egy páratlan szám lesz.

6. feladat (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{3}ford_{I}Ikat_{3}fel$)

We have the numbers 1, 2, ..., 2002 in this order. One can rearrange them by taking the last number and move it to the left to any position. The number which moves cannot overtake a bigger number. We repeat this procedure until it is possible.

Prove that after any rearrangement one of the (2k–1)th and (2k)th terms of the resulting sequence is an odd and the other is an even integer for every k=1, 2, ..., 1001.

7. feladat (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{3}ford_{I}kat_{1}fel$)

Az a, b, c, d egész számokra $a < b < c < d$ teljesül. Tudjuk, hogy az

$$E = (b-a)(b+c+d)(c+a+d)+(c-b)(c+a+d)(a+b+d)+(a-c)(a+b+d)(b+c+d)$$

kifejezés értéke prímszám. Mi ennek a prímszámnak az értéke?

1. megoldás (AD$_HALADOK_2001_3ford_Ikat_1fel_1mego$)

A megadott kifejezést átalakítva az

$$(a-b)(b-c)(c-a)$$

kifejezést kapjuk. Ez prímszám értéket csak akkor vehet fel, ha 2 tényező 1, ill. –1, és a harmadik p v. $--p$.

$$(a-b)<0$$
$$(b-c)<0$$

valamint

$$|a-b|<|c-a|$$
$$|b-c|<|c-a|$$

következik a feladat állításából, tehát p ill. $--p$ csak $(c-a)$ lehet, mert az a legnagyobb abszolútértékű a három tényező közül, ezért

$$(a-b)=-1$$
$$(b-c)=-1$$
$$c=a+2$$
$$(c-a)=2$$

emiatt a 2 az egyetlen prím érték, amit a kifejezés felvehet.

8. feladat (AD$_HALADOK_2001_3ford_Ikat_1fel$)

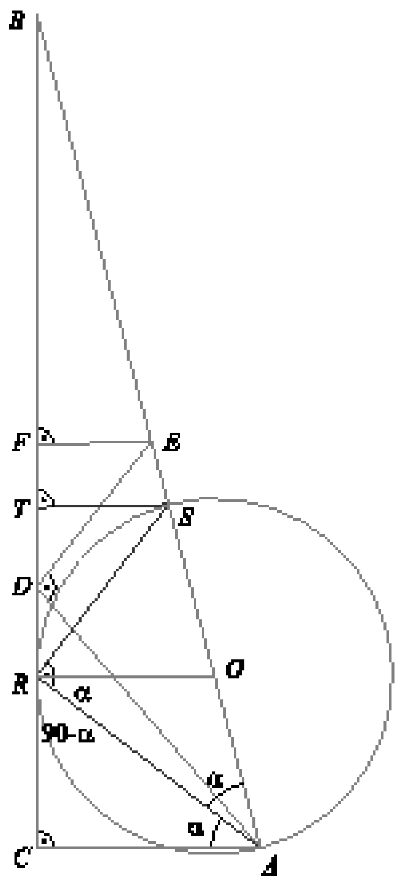
We have integer numbers $a<b<c<d$. We know that E is a prime and $E=(b-a)(b+c+d)(c+a+d)+(c-b)(c+a+d)(a+b+d)+(a-c)(a+b+d)(b+c+d)$. Find the value of E.

9. feladat (AD$_HALADOK_2001_3ford_Ikat_2fel$)

Az ABC derékszögű háromszög BC befogójának D pontjában az AD szakaszra állított merőleges az AB átfogót az E pontban metszi. Az E pont BC-re eső merőleges vetülete az F pont. Bizonyítsuk be, hogy a CF szakasz hossza akkor

minimális, ha a D pont rajta van az A csúcsból induló szögfelezőn.

1. megoldás (AD$_{H}ALADOK_{2}001_{3}ford_{I}kat_{2}fel_{1}mego$)



Az *ABC* háromszögben *EF* párhuzamos *AC*-vel, így a párhuzamos szelők tétele szerint

$$\frac{BF}{BC} = \frac{BE}{BA}$$
$$BE = BF\frac{BA}{BC}$$

***BA*/*BC* bármilyen F és E pont esetében állandó, így *BE* a *BF* lineáris függvénye. Tehát amikor *BF* maximumát keressük – ami ekvivalens *CF* minimumának keresésével –, elég *BE* maximumát keresni.**

A feladat szerinti, a BC oldalon futó D pontot jelölje R, ha rajta van $CAB\angle$ felezőjén is. Az ehhez tartozó E pont jele legyen S, F-é T.

ARS háromszög derékszögű, ezért a körülírható körének a középpontja AS szakasz felezőpontja (O). Így $OAR\angle = ORA\angle = \alpha$.

ACR háromszög is derékszögű, és az A-nál levő szöge α, így $ARC\angle = 90^\circ - \alpha$. Ebből az következik, hogy $RO \perp BC$, mert $CRO\angle = 90^\circ - \alpha + \alpha = 90^\circ$.

Tekintsük az ARS háromszöget, melynek az eddig elmondottak miatt BC nyilván érinti a köréírt körét (merőleges az OR sugárra és a végpontján, R-en megy át). Emiatt ha a BC-n futó D pontra $D \neq R$, akkor $ADS\angle < 90^\circ$. Ekkor az AD', ill. AD'' szakaszokra D'-ben ill. D''-ben állított merőleges AB-t a BS szakaszon metszi

így a kapható BE szakaszok nem nagyobbak BS-nél, és a feladat állítását bizonyítottuk.

10. feladat (AD$_H ALADOK_2 001_3 ford_I kat_2 fel$)

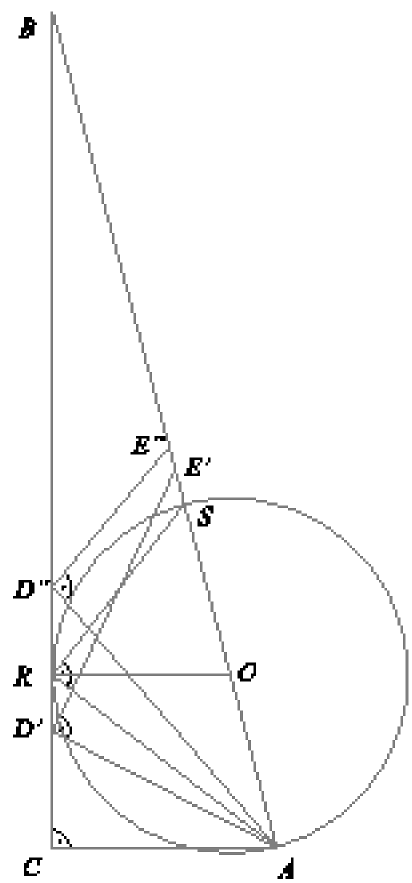
Let ABC be a right triangle, D and E are points on leg BC and hypotenouse AB respectively such that AD and DE are perpendicular. We drop a perpendicular from E to BC, and its foot is F. Prove that the length of CF is minimal if AD is the bisector of the triangle.

11. feladat (AD$_H ALADOK_2 001_3 ford_I kat_3 fel$)

a) Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan k egész szám van, amelyre k és $k+1$ is két pozitív egész szám négyzetének összegeként írható fel.

b) Igazoljuk azt is, hogy nem létezik olyan k egész szám, amelyre a k, $k+1$, $k+2$ és $k+3$ számok mindegyike felbontható két négyzetszám összegére.

1. megoldás (AD$_H ALADOK_2 001_3 ford_I kat_3 fel_1 mego$)


B
E''
E'
S
D''
R
O
D'
C
A

a) A négyzetszámok legyenek a^2, b^2, c^2, d^2, így:

$$k = a^2 + b^2$$
$$k + 1 = c^2 + d^2$$

$$k + 1 - k = 1$$
$$c^2 + d^2 - a^2 - b^2 = 1$$

Ez teljesül, ha $c = 1$, valamint d, a, b olyan pitagoraszi számhármas, ahol d a legnagyobb, mert így:

$$d^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 1$$

$$c^2 + d^2 = a^2 + b^2 + 1$$
$$c^2 + d^2 - a^2 - b^2 = 1$$

Mivel a d, a, b pitagoraszi számhármast végtelen sokféleképpen választhatjuk meg, így végtelen sok olyan k egész szám létezik, amelyre a feladat állítása teljesül.

b) A négyzetszámok 4-es osztási maradéka 0 v. 1. 4 egymást követő szám között van olyan, amelynek a 4-es osztási maradéka 3. De 2 négyzetszám összegének osztási maradéka csak

$$0 + 0 = 0$$
$$0 + 1 = 1$$
$$1 + 1 = 2$$

lehet, vagyis nincs olyan k pozitív egész, amelyre a feladat állítása teljesül.

12. feladat (AD$_H ALADOK_2 001_3 ford_I kat_3 fel$)

a) Prove that there are infinitely many integers k such that both k and k+1 are the sums of two perfect squares.

b) Prove that there is no such k that k, k+1, k+2, k+3 are all the sums of two perfect squares.