1. feladat ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 002_2 ford_I IIkat_1 fel$)

A 2003-ad fokú $f(x) = a_{2003}x^{2003} + a_{2002}x^{2002} + \ldots + a_1x + a_0$ **polinomhoz található olyan pozitív egész** p, q**és** r,**amelyekre** $p < \quad q < \quad r$ **és** $f(p) = q, f(q) = r$ **és** $f(r) = p$**.**

Bizonyítsuk be, hogy $f(x)$ **összes együtthatója nem lehet egész szám.**

1. megoldás ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 002_2 ford_I IIkat_1 fel_1 mego$)

Tegyük fel, hogy p, q**és** r **is egész. Mivel** $p - r| \; p^n - r^n$**-nek, ezért annak lineáris kombinációinak is osztója, tehát** $p - r| \quad f(p) - f(r)$**. A feladat feltétele szerint:** $f(p) = q$ **és** $f(r) = p$**, azaz** $p - r| \quad q - p$**. Azonban** $p < q < r$ **miatt** $|p - r| > |q - p|$**, ami miatt a** $p - r| \quad q - p$ **feltétel nem teljesülhet, tehát** p, q **és** r **mindegyike sem lehet egész.**

2. feladat ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 002_2 ford_I IIkat_1 fel$)

We have the following polynomial:

$$f(x) = a_{2003}x^{2003} + a_{2002}x^{2002} + ... + a_1x + a_0.$$

There are positive integers p, q, r **such that** $p < q < r$**and** $f(p) = q$, $f(q) = r$ **and** $f(r) = p$**.**

Prove that $f(x)$ **has a coefficient which is not an integer.**

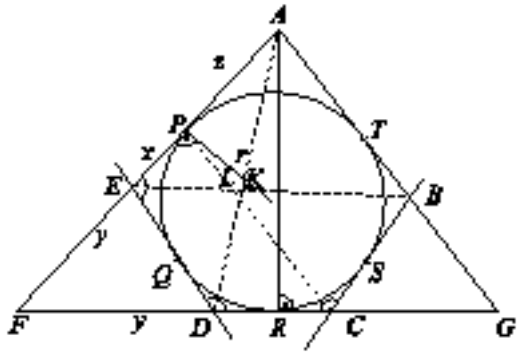
3. feladat ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 002_2 ford_I IIkat_2 fel$)

Az ***ABCDE*** **ötszögbe érintő kör írható. A** B, C, D, E **csúcsoknál lévő szögek egyenlők. Az ötszög beírt köre a** P **pontban érinti az** ***AE*** **oldalt. Bizonyítsuk be, hogy az** ***AD,PC*** **és** ***EB*** **egyenesek egy ponton mennek át.**

1. megoldás ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 002_2 ford_I IIkat_2 fel_1 mego$)

Egészítsük ki az ötszöget az ábra alapján az ***AFG*** **háromszögre:**

A szögek egyezése alapján az ***EFD*** **és a** ***BGC*** **háromszög egyenlőszárú;** ***FE=FD*** **és** ***GB=GC,*** **ahol** ***AFG*** **szög =** ***AGF*** **szög. A** ***P,Q,R,S,T*** **érintési pontokra az érintőszakaszok**



egyenlősége alapján $EP=QE=QD=DR$, illetve $TB=BS=SC=CR$ teljesül.

Az $EP=x$, $AP=AT=z$ jelöléssel – felhasználva, hogy az FGA háromszög egyenlőszárú –

$$PE = QE = QD = DR = TB = BS = SC = CR = x,$$

hiszen az R érintési pont az FG szakasz felezőpontja.

Ekkor pedig $FE = FD = GB = GC$.

Legyen $FE =$ y!

Az EFD és BGC háromszögek egybevágósága alapján EB párhuzamos FG-vel.

Az EB és AD szakaszok Kmetszéspontjára ekkor teljesül, hogy

$$\frac{EK}{FD} = \frac{AE}{AF},$$

hiszen az AEK háromszög hasonló az AFD háromszöghöz. Így

$$EK = \frac{y(x+z)}{x+y+z}.$$

Az EB és PC szakasz metszéspontja legyen L!

Az ELP és FCP háromszög hasonlósága alapján ekkor

$$\frac{EL}{FC} = \frac{PE}{PF}$$

azaz

$$EL = \frac{(2x+y)x}{x+y}.$$

Azt kell igazolnunk, hogy $K = L$,tehát $\boldsymbol{EK = EL}$, vagyis

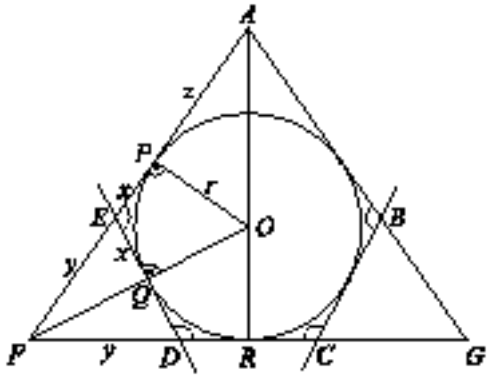
$$\frac{y(x+z)}{x+y+z} = \frac{(2x+y)x}{x+y}.$$

Ekvivalens állításokkal így

$$z = \frac{2x^2(x+y)}{y^2-2x^2}$$

a bizonyítandó állítás.

A bizonyításhoz tekintsük a következő ábrát:



Az $\boldsymbol{FQE}$ és az $\boldsymbol{FPO}$ háromszög hasonlósága alapján

$$\frac{r}{x} = \frac{x+y}{\sqrt{y^2-x^2}},$$

ahonnan

$$r^2 = \frac{x^2(x+y)}{y-x}.$$

(felhasználtuk Pitagorasz tételét is az $\boldsymbol{FQE}$ derékszögű háromszögre).

Az $\boldsymbol{ARF}$ derékszögű háromszögből

$$AR = \sqrt{(x+y+z)^2-(x+y)^2}.$$

Pitagorasz tétele szerint, azért az $\boldsymbol{OPA}$ és az $\boldsymbol{FRA}$ háromszög hasonlósága alapján

$$\frac{r}{x+y} = \frac{z}{\sqrt{(x+y+z)^2-(x+y)^2}}.$$

Az

$$r^2 = \frac{x^2(x+y)}{y-x}$$

helyettesítéssel rendezés után

$$z^2 = \frac{x^2(x+y)}{y-z} \cdot \frac{x(2x+2y+z)}{(x+y)^2},$$

Azaz

$$z = \frac{x^2(2x+2y+z)}{(y-x)(y+z)}$$

adódik, ahonnan z-t kifejezve

$$z = \frac{2x^2(x+y)}{y^2-2x^2}.$$

Ezzel pedig állításunkat igazoltuk, tehát az *AD, PC* és *EB* egyenes valóban egy pontban metszi egymást.

4. feladat (AD$_H ALADOK_2 002_2 ford_I IIkat_2 fel)$

Circle k touches the sides of pentagon *ABCDE*. The angles of the pentagon at B, C, D and E are equal. The common point of k and *AE* is P. Prove that lines *AD*, *PC* and *EB* are concurrent.

5. feladat (AD$_H ALADOK_2 002_2 ford_I IIkat_3 fel)$

András, Béla és Csaba a következő játékot játssza. Először András és Csaba megállapodnak abban, hogy néhány általuk megbeszélt 3x3-as táblázat közül fog majd egyet felrajzolni András. Minden 3x3-as táblázat mind a kilenc mezőjében a 0 vagy az 1 szám áll.

Ezután Csaba kimegy a szobából, András pedig felrajzol a megbeszélt táblázatok közül egyet (amit természetesen nem árult el előre).

Béla most az adott táblázat egyik tetszőleges mezőjében megváltoztathatja az ott lévő számot;

0-t 1-re vagy 1-et 0-ra (de nem kötelező változtatnia). Ezután Csaba bejön és ki kell találnia, hogy mi volt az eredetileg felrajzolt táblázat.

a) Bizonyítsuk be, hogy András és Csaba ki tud választani előzetesen 26 darab táblázatot, úgy, hogy ha András ezek közül bármelyiket rajzolja fel, akkor Béla bármilyen megengedett változtatása esetén Csaba mindig ki tudja találni, hogy mi volt az eredetileg felrajzolt táblázat.

b) Bizonyítsuk be azt is, hogy ha András és Csaba 26 helyett 52 táblázatot válasz, és András ezek közül rajzolja fel bármelyiket, akkor már nem biztos, hogy Béla változtatása után Csaba ki tudja találni az eredeti ábrát.

1. megoldás (AD$_H ALADOK_2 002_2 ford_I IIkat_3 fel_1 mego$)

a) Vizsgáljuk a kitöltött 3x3-as táblázatokban a sorokban és az oszlopokban lévő 0 és 1-es jegyek számának paritását!

Hozzunk létre olyan kitöltéseket, melyekben az 1-esek számának paritása minden sorban azonos, és minden oszlopban is azonos. Ezáltal olyan kitöltés nem jöhet létre, hogy abban az 1-esek száma minden sorban páratlan és minden oszlopban páros, hiszen ekkor 3 páratlan szám összegeként is előáll a 9 számjegy összege és 3 páros szám összegeként is, ez pedig ellentmondás. Tehát olyan kitöltéseket keresünk, amelyekben minden sorban és minden oszlopban páros db 1-es van, vagy páratlan db egyes van.

Az így kitöltött táblázatok azért lesznek jók, mert amikor Béla megváltoztat egy jegyet, azzal az egyesek számának paritása közül pontosan 1 oszlopot és 1 sort tud elrontani. Tehát amikor András bejön és megnézi a táblázatot, akkor ha azt látja, hogy minden sorban és minden oszlopban azonos az 1-esek számának paritása, abból az következik, hogy Béla egy jegyet sem változtatott meg. Ha azt tapasztalja, hogy van hét sor és hét oszlop, amiben páros db 1-es van és 1-1 oszlop és sor, melyekben páratlan db 1-es

van, akkor tudja, hogy az a számjegy lett megváltoztatva, amelyik a ,,páratlanos" sornak és oszlopnak is tagja. Ezt megváltoztatva megkapja az eredeti kitöltést. Hasonlóan megy, ha 2-2 db páratlan darabszámú sort és oszlopot, valamint 1-1 db páros darabszámú 1-es tartalmazó sort és oszlopot talál, csak ekkor a ,,párosos" sor és oszlop közös elemét kell megváltoztatnia. Tehát beláttuk, hogy ez a kitöltés jó. Most már csak meg kell számolni, hogy van-e 26db ilyen kitöltés:

Először azokat számoljuk, amelyekben minden sorban és minden oszlopban páratlan db 1-es van:

–9db 1-es:

1 1 1
1 1 1
1 1 1

–minden sorban és minden oszlopban 1db 1-es:

1 0 0
0 1 0
0 0 1

Ezáltal 3*2=6 féle képpen lehet kitölteni, hiszen az első sorban az 1-es 3 helyen lehet, másodikban 2 helyen a harmadikban meg egy helyen.

–2 sorban és 2 oszlopban 1db 1-es van, 1-sorban és 1-oszlopban pedig 3db 1-es van

1 1 1
1 0 0
1 0 0

Az a sor, amiben van a 3db 1-es, lehet 3 helyen és az az oszlop, amiben van 3db 1-es az is 3 helyen lehet. Ezáltal 3*3 = 9 db lehet

Ha ezekben a kitöltésekben felcseréljük a 0-kat és az 1-eseket akkor olyan táblázatokat kapunk ahol minden oszlopban és minden oszlopban páros az 1-esek száma. Tehát ezek is jók.

Vagyis $(1+6+9)\cdot 2 = 32$ ilyen táblázat van.

Tehát az állítást beláttuk.

b) Egy adott táblázatból egy változtatással 9 másik táblázatba lehet eljutni. Vagyis egy táblázat másik kilencet tilt le. Összesen $2^9 = 512$ táblázat van. Viszont $512/10 < 52$, tehát

ha 52 táblázatot választunk ki, akkor biztos lesz kettő, amelyekből egy változtatással a másikba lehet jutni. Tehát Béla változtatása után Csaba nem biztos, hogy ki tudja találni az eredeti ábrát.

6. feladat (AD$_H ALADOK_2 002_2 ford_I I I kat_3 fel$)

Six towns are situated in a flat area. There are three straight roads; one from A_1 to B_1, one from A_2 to B_2 and one from A_3 to B_3. Every day a courier c_i sets off from A_i to B_i at 8 o'clock in the morning and arrives to B_i at 12 (i=1, 2, 3). Their speeds are constant.

During their mission c_1 and c_2 meet at 9 o'clock, c_1 and c_3 meet at 10 o'clock and c_2 and c_3 meet at 11 o'clock. Find the distance of B_1 and B_2 if A_1A_2=1km, A_2A_3=3km.

7. feladat (AD$_H ALADOK_2 002_2 ford_I I kat_1 fel$)

Melyik az a háromjegyű szám, amelyre igaz, hogy az első számjegyét letörölve, majd ezt a számjegyet a megmaradó két számjegy után írva, olyan háromjegyű számot kapunk, melynek négyzetgyöke 9-cel kisebb az eredeti szám négyzetgyökénél?

1. megoldás (AD$_H ALADOK_2 002_2 ford_I I kat_1 fel_1 mego$)

Legyen x az egyik, y pedig a másik háromjegyű szám. Ekkor fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\sqrt{x} = \sqrt{y} + 9$$

Ezt négyzetre emelhetjük, mert mindkét oldal nemnegatív.

$$x = y + 81 + 18\sqrt{y}$$

x, y és 81 egészek, ezért $\sqrt{y}$-nak racionálisnak kell lennie, de ha egy egész szám gyöke racionális, akkor egész is. Így $\sqrt{x}$ és $\sqrt{y}$ is egész. Felírjuk a háromjegyű négyzetszámokat:

100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961.

A négyzetszámok végződése 0,1,4,5,6 vagy 9 lehet, tehát kizárhatjuk azokat a számokat, ahol nem ezek valamelyike az első számjegy, mert az első számjegyet a szám végére írva is négyzetszámot kell kapnunk. Amit kapunk négyzetszámot, annak kisebbnek kell lennie az eredeti négyzetszámnál, ezért azokat is kizárhatjuk, ahol a második számjegy nagyobb az elsőnél. Ha 0 a második jegy, akkor a keletkezett szám nem háromjegyű, így ezeket is kizárhatjuk. Ha $\sqrt{x}$ páros, akkor $\sqrt{y}$ páratlan, ha $\sqrt{x}$ páratlan, akkor $\sqrt{y}$ páros. ($\sqrt{x} = \sqrt{y} + 9$ egyenlet miatt). Így azokat a számokat is kizárhatjuk, melyeknek első és utolsó számjegyeik egyező paritásúak. Ezek után marad 2 számunk, a 441 és a 625. A 441 nem jó, mert $\sqrt{414}$ nem egész.

$\sqrt{625} = 25 \quad \sqrt{256} = 16,$ **ezek különbsége 9.**

Így a 625 a feladat egyetlen megoldása.

8. feladat (AD$_H ALADOK_2 002_2 ford_I Ikat_1 fel$)

We have a 3-digit number, $\overline{xyz}$. The square root of $\overline{yzx}$ is smaller than the square root of$\overline{xyz}$ by 9. Determine $\overline{xyz}$.

9. feladat (AD$_H ALADOK_2 002_2 ford_I Ikat_2 fel$)

Bármely derékszögű háromszögbe két olyan négyzet írható, amelynek csúcsai a háromszög kerületén vannak. Legfeljebb mekkora lehet a nagyobb és a kisebb négyzet területének aránya?

1. megoldás (AD$_H ALADOK_2 002_2 ford_I Ikat_2 fel_1 mego$)

$$\frac{ab}{2} = \frac{bx}{2} + \frac{ax}{2}$$

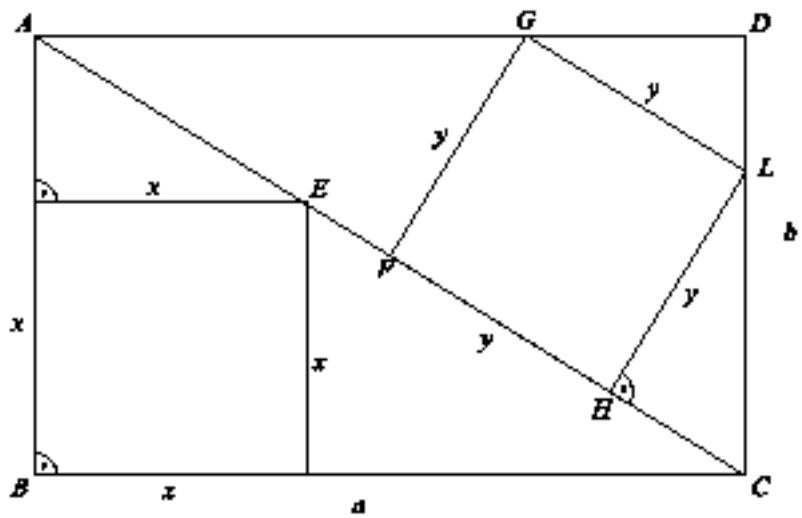
(Az *ABC*, *BEA*, *BEC* háromszögek területéből)

Ebből:

$$x = \frac{ab}{a+b}.$$

Az *AFG* és *ADC* háromszögek hasonlóak (szögeik megegyeznek). A hasonlóság aránya:

$$\frac{AF}{y} = \frac{a}{b}$$



ebből

$$AF = \frac{a}{b}y.$$

Hasonlóképpen a CHL, ACD háromszögek hasonlóságából:

$$\frac{CH}{y} = \frac{b}{a}$$

ebből

$$CH = \frac{b}{a}y.$$

AC oldalt felírjuk 3 szakasz összegeként:

$$AC = AF + FH + HC = (\frac{a}{b} + 1 + \frac{b}{a})y.$$

Pitagorasz-tételből:

$$a^2 + b^2 = (\frac{a}{b} + 1 + \frac{b}{a})^2 y^2.$$

Ebből:

$$y^2 = \frac{(a^2 + b^2)\, a^2 b^2}{(a^2 + b^2 + ab)}.$$

A fenti x-ből és az itteni y^2-ből:

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}}{\frac{(a^2+b^2)a^2b^2}{(a^2+b^2+ab)}} = \frac{\left(a^2+b^2+ab\right)^2}{(a^2+b^2)(a^2+b^2+2ab)} = \frac{a^4+b^4+3a^2b^2+2ab^3+2a^3b}{a^4+b^4+2a^2b^2+2ab^3+2a^3b} =$$
$$= 1 + \frac{a^2b^2}{a^4+b^4+2a^2b^2+2ab^3+2a^3b} = 1 + \frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)(a+b)^2} \leq 1 + \frac{a^2b^2}{2ab(a+b)^2} = 1 + \frac{ab}{2(a+b)^2} \leq$$
$$\leq 1 + \frac{ab}{2\cdot 4ab} = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}.$$

A fenti becslések igazolása:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \sqrt{ab} \rightarrow a^2+b^2 \geq 2ab,$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab \rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab$$

Tehát a két kérdezett négyzet területének aránya maximum 9/8 lehet, és az egyenlőség akkor valósul meg, ha ($a = b$) az eredeti háromszög egyenlőszárú.

10. feladat (AD$_H ALADOK_2 002_2 ford_I Ikat_2 fel$)

There are two ways of drawing a square in a right triangle such that every vertex of the square is on the perimeter of the triangle. Find the maximal ratio of the areas of these two squares.

11. feladat (AD$_H ALADOK_2 002_2 ford_I Ikat_3 fel$)

Legyen $g(x)$ egész együtthatós polinom.

Bizonyítsuk be, hogy az alábbi polinomnak nincs egész gyöke:

$$\mathbf{6}(x^2+\mathbf{1})^2+\mathbf{5}g(x)\cdot(x^2+\mathbf{1})\text{-}\mathbf{21}\cdot g^2(x).$$

1. megoldás (AD$_H ALADOK_2 002_2 ford_I Ikat_3 fel_1 mego$)

A megoldóképlet alapján:

$$(x^2+1)_{1,2} = \frac{-5g(x) \pm \sqrt{25g^2(x)+504g^2(x)}}{12}$$

$$(x^2+1)_1 = \frac{3}{2}g(x),\ \ (x^2+1)_2 = -\frac{7}{3}g(x)$$

Tegyük fel, hogy van egész gyöke: a.

I.

$$a^2 + 1 = \frac{3}{2}g(a),$$

$$2 \cdot (a^2 + 1) = 3 \cdot g(a)$$

Az egyenlet bal oldala páros, tehát $g(a)$-nak is párosnak kell lennie. Így a^2+ 1 = 3k. Ellentmondásra jutottunk, mivel négyzetszám nem adhat 3-mal osztva 2 maradékot.

II.

$$a^2 + 1 = -\frac{7}{3}g(a),$$

$$3 \cdot (a^2 + 1) = -7 \cdot g(a)$$

Hasonlóképpen $g(a)$ osztható kell hogy legyen 3-mal.

a^2+ 1 = -7n Viszont egy négyzetszám nem adhat 7-tel osztva 6 maradékot sem.

Tehát ez alapján nincs olyan a egész szám, ami gyöke lenne a kérdéses polinomnak.

12. feladat (AD$_H ALADOK_2 002_2 ford_I Ikat_3 fel$)

The coefficients of the polynomial $g(x)$ are integers. Prove that the following polynomial has no integer root: $6\left(x^2+1\right)^2 + 5g(x) \cdot \left(x^2+1\right) - 21 \cdot g^2(x)$.

13. feladat (AD$_H ALADOK_2 002_2 ford_I Ikat_4 fel$)

Egy 2n-szög mindegyik csúcsára a –1 vagy 1 számot írtuk rá.

Egy lépésben bármelyik (n+1) darab csúcsra írt szám mindegyikének megváltoztathatjuk az előjelét.

Milyen n érték esetén, mely kezdőhelyzetből indulva érhető el a megengedett lépés tetszőleges számú alkalmazásával, hogy mindegyik csúcshoz az 1-es szám tartozzon?

1. megoldás (AD$_H ALADOK_2 002_2 ford_I Ikat_4 fel_1 mego$)

Tegyük fel, hogy k db –1-es van.

I. eset: k páros.

Ha kettesével csökkentjük k-t, eléri a nullát, ami a „cél" (hogy nem legyen –1-es).

Van 2 db –1-es, amit meg akarunk változtatni: (...n db szám...) –1 –1

Megváltoztatjuk az n db számot, és az egyik –1-est; majd a következő lépésben az n db számot visszaváltoztatjuk, és a másik –1-esből is +1-et csinálunk. Így 2 db –1-est +1-esre tudunk változtatni. Ezzel a módszerrel kettesével tudjuk k-t csökkenteni és egy idő után elérjük hogy csak +1-es lesz.

II. eset: k páratlan.

a) n páros $\diamondsuit$ n+1 páratlan.

Akkor 1 lépésből (n+1) db –1-est megváltoztatunk ha k $\geq$ n+1, ha k $<$ n+1, akkor a –1 eseket és néhány 1-est. Így k páros lesz, a feladatot visszavezettük az I esetre.

b) n páratlan $\diamondsuit$ n+1 páros.

Ekkor a változtatásokkal k paritása nem változik, így sosem lehet nulla.

14. feladat (AD$_H ALADOK_2 002_2 ford_I Ikat_4 fel$)

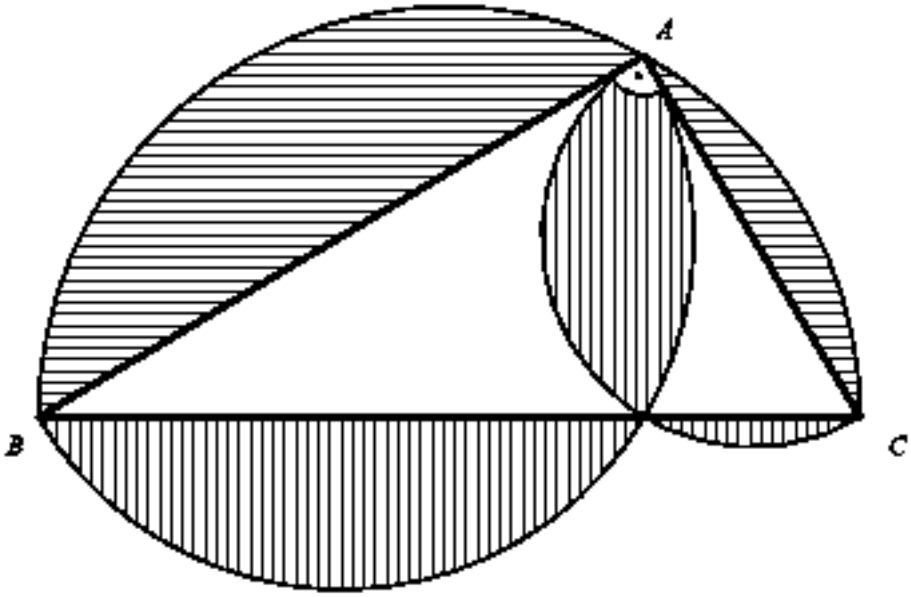
At each vertex of a 2n-gon there is either a 1 or a –1. We may choose (n+1) vertices and change the sign of the number at all of them. Repeating this procedure we would like to reach that all the numbers are 1s. For what n and initial position is it possible?

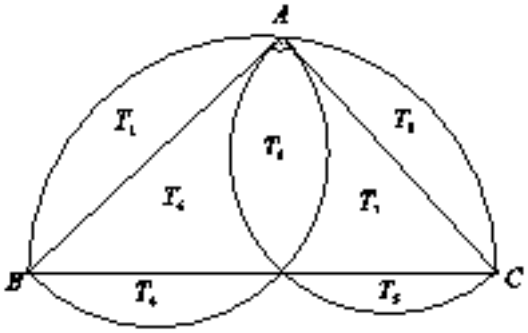
15. feladat (AD$_H ALADOK_2 002_2 ford_I kat_1 fel$)

Az ABC derékszögű háromszög oldalai fölé rajzolt Thalesz-körívek az ábrán látható síkrészeket határozzák meg. Bizonyítsuk be, hogy a bevonalkázott öt darab síkrész közül az AB ill. AC befogóra illeszkedők területösszege megegyezik a maradék három rész területének összegével.

1. megoldás (AD$_H ALADOK_2 002_2 ford_I kat_1 fel_1 mego$)

Az AB=c, AC=b, BC=a jelölésekkel Pitagorasz tételéből $a^2 = b^2 + c^2$. A BC fölé írt Thalész-félkör területe (az ábra


A
B
C


A
B
C

jelöléseivel)

$$\frac{a^2\pi}{2} = T_1 + T_6 + T_3 + T_7 + T_2$$

Az AC fölé írt Thalész-félkör területe:

$$\frac{b^2\pi}{2} = T_3 + T_7 + T_5$$

Az AB fölé írt Thalész-félkör területe:

$$\frac{c^2\pi}{2} = T_4 + T_6 + T_3$$

Mivel

$$\frac{a^2\pi}{2} = \frac{b^2\pi}{2} + \frac{c^2\pi}{2}$$

ezért

$$T_1 + T_6 + T_3 + T_7 + T_2 = (T_3 + T_7 + T_5) + (T_4 + T_6 + T_3)$$

Mindkét oldalból

$$T_3 + T_7 + T_6$$

-ot elvéve a bizonyítandó

$$T_1 + T_2 = T_3 + T_4 + T_5$$

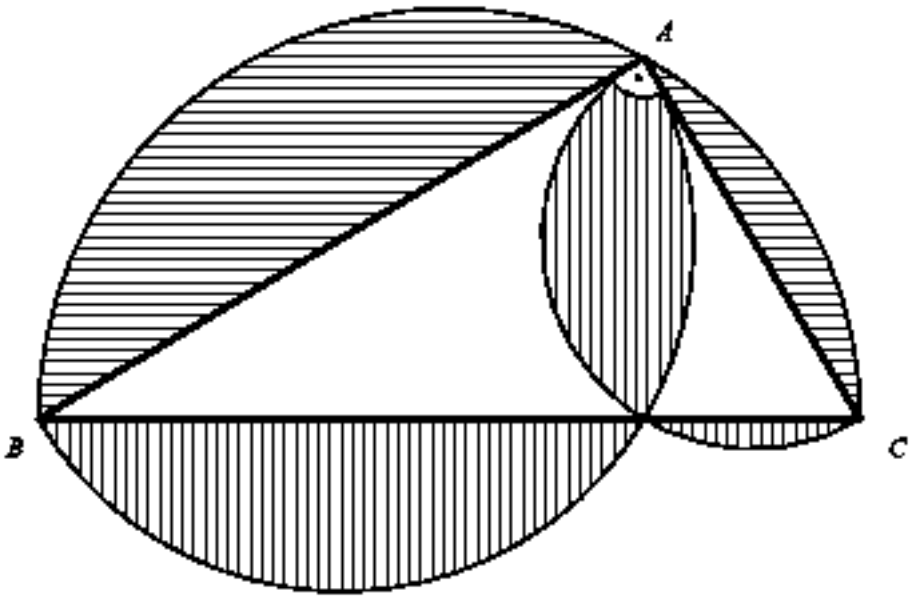
egyenlőséget kapjuk.

16. feladat (AD$_H ALADOK_2 002_2 ford_I kat_1 fel)$

Let ABC be a right triangle. We draw semicircles with diameters AB, BC and CA and this way we get the following figure. Prove that out of the five shaded fields the sum of the areas attached to AB and AC is equal to the sum of the areas of the other three parts.

17. feladat (AD$_H ALADOK_2 002_2 ford_I kat_2 fel)$

Melyik az a háromjegyű szám, amelyre igaz, hogy az első számjegyét letörölve, majd ezt a számjegyet a megmaradó két számjegy után írva,



olyan háromjegyű számot kapunk, melynek négyzetgyöke 9-cel kisebb az eredeti szám négyzetgyökénél?

1. megoldás (AD$_H ALADOK_2 002_2 ford_I kat_2 fel_1 mego$)

Legyen az eredeti háromjegyű szám:

$$\overline{xyz} = 100x + 10y + z$$

Vezessük be a $10y + z = u$ **jelölést, ahol** $10 \leq u \leq 99$**.**

A feladat feltételei alapján ekkor

$$\sqrt{100x + u} = a \geq 10$$

és

$$\sqrt{10u + x} = a - 9 \geq 1$$

Egyenleteink négyzetre emelt alakjának megfelelő oldalait kivonva egymásból

$$(100x + u) - (10u + x) = a^2 - (a - 9)^2$$

azaz

$$99x - 9u = 18a - 81 > 0$$

adódik. 9-cel való osztás után az u-ra rendezett alak:

$$u = 11x + 9 - 2a$$

Mivel u és x egész szám, ezért az a szám racionális szám, ekkor pedig

$$a \in Z^+$$

hiszen

$$100x + u = a^2$$

A $100x + u = a^2$ egyenletbe helyettesítve az u-ra kifejezett értéket a

$$111x + 9 - 2a = a^2$$

formulát kapjuk, ami rendezéssel

$$111x + 10 = (a+1)^2$$

alakú. A $111x + 10$ összeg x {1,2,. . . ,9} esetén viszont csak $x = 1$-re és $x = 6$ -ra négyzetszám.

Az $x = 1$ esetben $\overline{xyz} = 100$nem felel meg a feltételnek.

Az $x = 6$ esetben $676 = (a+1)^2$, ahonnan $a = 25$.

Az eredeti háromjegyű szám így 625, ami megfelelő is, hiszen

$$\sqrt{625} = 25, \ \sqrt{256} = 16$$

18. feladat (AD$_H ALADOK_2 002_2 ford_I kat_2 fel$)

We have a 3-digit number, $\overline{xyz}$. The square root of $\overline{yzx}$ is smaller than the square root of$\overline{xyz}$ by 9. Determine $\overline{xyz}$.

19. feladat (AD$_H ALADOK_2 002_2 ford_I kat_3 fel$)

Adjunk meg 21 egymást követő pozitív egész számot úgy, hogy a kisebb 11 db szám (azaz az első 11 darab) négyzetösszege megegyezzen a 10 darab nagyobb szám négyzetének összegével.

1. megoldás (AD$_H ALADOK_2 002_2 ford_I kat_3 fel_1 mego$)

Olyan x pozitív egész számot kell keresni, amelyre

$$x^2 + (x+1)^2 + ... + (x+10)^2 = (x+11)^2 + (x+12)^2 + ... + (x+20)^2$$

teljesül. Az egyenlet átrendezett alakja:

$$x^2 = \left[(x+11)^2 - (x+1)^2\right] + \left[(x+12)^2 - (x+2)^2\right] + \left[(x+13)^2 - (x+3)^2\right] + ... + \left[(x+20)^2 - (\right.$$

Mivel

$$(x+10+i)^2 - (x+i)^2 = 10 \cdot (2x+10+2i) = 20\,(x+i+5)$$

bármely 1 $\leq \quad i \quad \leq$ **10 esetén, ezért**

$$x^2 = 20\,(x+6) + 20\,(x+7) + 20\,(x+8) + ... + 20\,(x+15)$$

Újabb rendezéssel

$$x^2 = 10 \cdot 20x + 20\,(6+7+8+...+15)$$

adódik. A 6+7+8+...+15 összeg értéke 105, így egyenletünk

$$x^2 - 200x = 2100$$

alakú. Teljes négyzetté alakítással

$$(x-100)^2 = 12100 = 110^2$$

ezért

$$|x-100| = 110$$

A kapott egyenlet pozitív egész megoldása: x**= 210**

A 21 db megfelelő szám – eredményünk alapján -:

210, 211, 212, . . . , 230

Megjegyzés:

21 db szám helyett (2n**+1)-et véve** x **értékére megoldásunk alapján** x **= (2**n**+1)•**n **adódik.**

20. feladat (AD$_H ALADOK_2 002_2 ford_I kat_3 fel)$

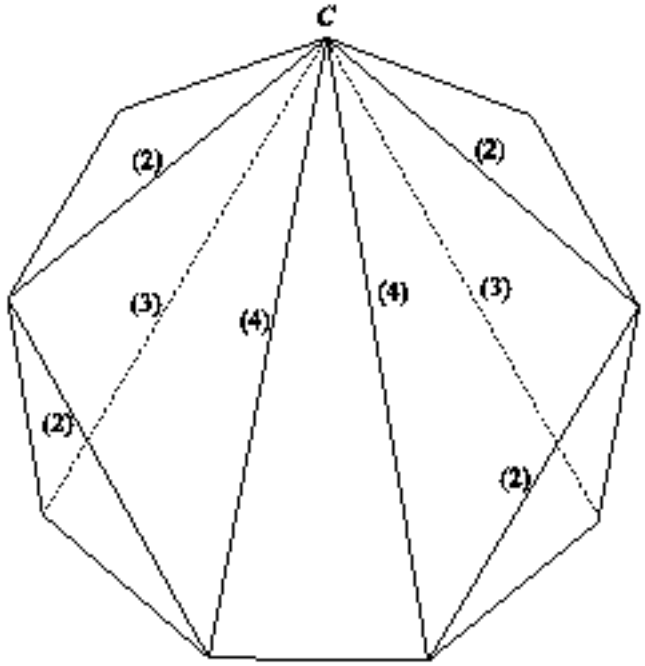
Find 11 consecutive integers such that the sum of their squares is equal to the sum of the squares of the next 10 integers.

21. feladat (AD$_H ALADOK_2 002_2 ford_I kat_4 fel)$

Egy szabályos kilencszöget, egymást nem metsző átlók berajzolásával úgy akarunk háromszögekre

darabolni, hogy a kilencszög mindegyik csúcsa a keletkezettek közül páratlan számú háromszögnek legyen a csúcsa. Mutassuk meg, hogy ez, a szimmetriától eltekintve, csak egyféleképpen lehetséges. (Vagyis: bármely két ilyen felbontás alkalmas forgatással vagy tükrözéssel egymásba vihető.)

1. megoldás (AD$_H ALADOK_2 002_2 ford_I kat_4 fel_1 mego$)



A keletkezett háromszögek szögeinek összege – a feladat feltételei miatt – egyenlő a sokszög szögeinek összegével, tehát összesen 7 háromszög keletkezik, azaz 6 átló húzható be.

Háromféle átló lehetséges: az ábránk szerinti csúcsot (C) **a második, harmadik és negyedik csúccsal összekötő. (Nevezzük (2)-es, (3)-as és (4)-es típusúnak!)**

A (3)-as típusú nem jöhet szóba a feltételek szerint. (A (3)-as típusú átló a kilencszögből levág egy négyszöget, amelynek feltétlenül lesz olyan csúcsa, amely páros számú

háromszögnek a csúcsa.)

(4)-es típusú legföljebb kettő rajzolható be, (2)-es típusú maximum négy. (2)-es és (4)-es típusból együtt legföljebb 6. (lásd az ábrát!)

Ez a feldarabolás egyértelmű, mert:

– a C-ből induló szögfelezőre szimmetrikus

– bármely csúcs C helyére fordíthat úgy, hogy a kilencszög önmagába megy át.

22. feladat (**AD**$_H ALADOK_2 002_2 ford_I kat_4 fel$)

We triangulate a regular 9-gon with diagonals which do not intersect inside the 9-gon. Each vertex of the 9-gon is the vertex of an odd number of these triangles. Prove that essentially there is only one such triangulation. (From one triangulation we can get any other by reflection and/or rotation.)

23. feladat (**AD**$_K EZDOK_2 002_2 ford_I II kat_1 fel$)

Bizonyítsa be, hogy van olyan szám, amely a tízes számrendszerben 987654321-re végződik és osztható 2003-a!

24. feladat (**AD**$_K EZDOK_2 002_2 ford_I II kat_1 fel$)

Prove that there is a multiple of 2003 such that the last digits of it are 987654321 (in the base 10).

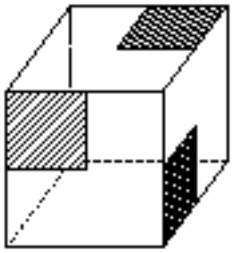
25. feladat (**AD**$_K EZDOK_2 002_2 ford_I II kat_2 fel$)

Adott egy $10*10*10$**-es kockarács. Három ember (A, B és C) a következő játékot játssza: felváltva (A,B,C,A,B,C,...) elhelyeznek a kockarácsban egy-egy** $1*1*10$**-es rudat, három egymásra merőleges irányból. (Mindegyikőjük csak a hozzá tartozó irányból helyezheti el a rúdját.) A rudakat teljesen be kell tolni és nem ütközhetnek egymással,**

legfeljebb érintkezhetnek. Hány (teljes) körből állhat a leghosszabb játék?

1. megoldás (**AD**$_K EZDOK_2 002_2 ford_I IIkat_2 fel_1 mego$)

A játék legfeljebb 25 körből állhat. Színezzük a kocka felületén egy kis négyzetet feketére, ha a játék során állítottak rá merőlegesen rudat. A 25 körre egy lehetséges megvalósítás látható a képen, a fekete négyetek megjelölésével.



1. ábra.

Megmutathatjuk, hogy 25 körnél több már nem lehet. Egy csúcs körül a három lap egyike A-hoz, egy másik B-hez, míg a harmadik C-hez tartozik. Vezessük be a következő jelöléseket: a_b,a_c,b_a,b_c,c_a,c_b, **stb, ahol** x_y **jelentése, X lapján a sorok és oszlopok számát, melyek hossztengelye merőleges Y-éra, és tartalmaznak fekete négyzetet. Ekkor:**

$$a_b + b_a \leq 10,$$

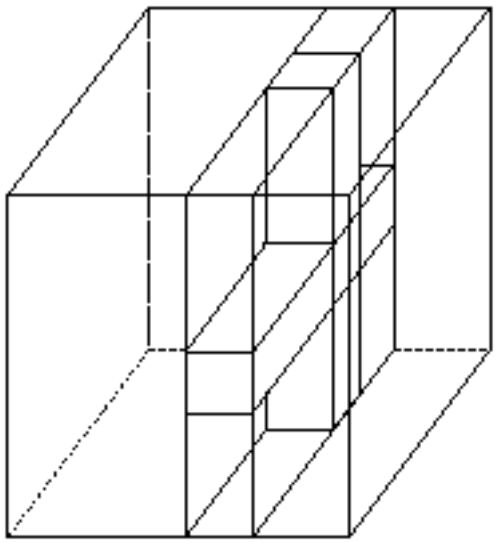
mert A és B lapjáról egy-egy szomszédos sort vagy oszlopot párba állítva 10 pár keletkezik, és egy pár mindkét elemében nem lehet egyszerre fekete négyzet.

Ugyanígy $b_c + c_b \leq 10$ **és** $a_c + c_a \leq 10$

Tehát $(a_b+b_a)+(b_c+c_b)+(a_c+c_a) \leq 30$, **azaz** $(a_b+a_c)+(b_a+b_c)+(c_a+c_b) \leq 30$

Az itt szereplő három számpár közül valamelyikre feltehetjük, hogy mondjuk:

$$a_b + a_c \leq 10.$$



2. ábra.

Ekkor a számtani-mérteni közepekre vonatkozó tétel miatt, fölírható:

$$a_b \cdot a_c \leq \left(\frac{a_b + a_c}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{10}{2}\right)^2 \leq 25.$$

Már pedig $a_b \cdot a_c$ jelentése nem más, mint az A lapon lévő fekete négyzetek száma, ami a lejátszott körök számát jelenti.

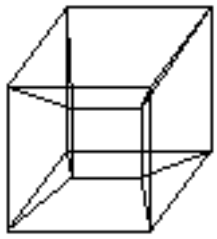
26. feladat (AD$_K EZDOK_2 002_2 ford_I IIkat_2 fel$)

We have a 10×10×10 cubic grid. Three persons A, B, C play the following game. Alternately (A, B, C, A, B, C, ...) they place a 1×1×10 brick into the grid from three different directions perpendicular to one another. Each person has a direction, he must always place his "rod" from that direction. The "rods" must be entirely inside the cube, they may touch each other, but they cannot intersect. What is the greatest number of full

rounds in such a game?

27. feladat (AD$_K EZDOK_2 002_2 ford_I IIkat_3 fel$)

A tapasztalat azt mutatja, hogy ha egy drótból készült kockát szappanos vízbe mártunk, egy, az alábbi ábrán szemléltetett szappanhártya keletkezik, mely egy négyzetből, négy egybevágó egyenlő szárú háromszögből, és nyolc egybevágó szimmetrikus trapézból áll. Mutassa meg, hogy az így létrejött hártya felszíne – minden hártyaidomnak csak az egyik oldalát számítva – legfeljebb a tömörnek képzelt kocka felszínének a $\frac{11}{12}$-e. Javítható-e ez a becslés?



3. ábra.

1. megoldás (AD$_K EZDOK_2 002_2 ford_I IIkat_3 fel_1 mego$)

Kiszámolható, hogy a területek a következő képpen írhatóak fel (kocka éle 1 egység, belső negyzet oldala a)

$$T_{trapezok} = 8\cdot\left[\frac{1+a}{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1-a}{2}\right)^2}\right],\ T_{haromszogek} = 8\cdot\left[\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1-a}{2}\right],\ T_{negyzet} = a^2$$

Ekkor az állítást a következő képpen lehet felírni:

$$T_{trapezok} + T_{haromszogek} + T_{negyzet} \leq 5$$

Írjunk fel ekkor három nyilvánvaló egyenlőtlenséget:

A)

$$\sqrt{2} \leq 2$$

$$8 \cdot \left[\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1-a}{2}\right] \leq 8 \cdot \left[2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1-a}{2}\right] \ (1)$$

B)

$$3 \cdot a^2 \leq 1 + 2 \cdot a$$

$$4 \cdot \left(1 + (1-a)^2\right) \leq (3-a)^2$$

$$2\sqrt{1 + (1-a)^2} \leq 1 - a + 2$$

$$8 \cdot \left[\frac{1+a}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-a}{2}\right)^2}\right] \leq 1 - a^2 + 2 + 2a \ (2)$$

C)

$$a^2 = a^2 \ (3)$$

Összeadva a 3 egyenlőtlenséget:

$$T_{trapezok} + T_{haromszogek} + T_{negyzet} \leq 5$$

28. feladat (AD$_K EZDOK_2 002_2 ford_I IIkat_3 fel$)

Experience proves that submerging the edge system of a cube made of wire into soapy water, the soap film will generate the shape shown in the figure. It consists of a square, four congruent isosceles triangles and eight congruent symmetric trapezoids. We denote the surface of the cube with A.

Show that the surface of this soap film –considering only one side of each face– is at most $\frac{11}{12}A$**. Can we make a better estimation?**

29. feladat (AD$_K EZDOK_2 002_2 ford_I Ikat_1 fel$)

Mennyi az alábbi kifejezés legkisebb értéke, ha x **és** y**valós számok:**

$$2x^2 - xy + y^2 + 2x + 3y$$

1. megoldás (AD$_K EZDOK_2 002_2 ford_I Ikat_1 fel_1 mego$)

$$2x^2 - xy + y^2 + 2x + 3y = (x+1)^2 + x^2 - xy + y^2 + 3y - 1 =$$

$$= (x+1)^2 + \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4} + y^2 + 3y - 1 = (x+1)^2 + \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3(y+2)^2}{4} - 4 \geq -4$$

Mivel x = -1 és y = -2 esetén egyenlőség áll fenn, a kifejezés legkisebb értéke –4.

30. feladat (AD$_K EZDOK_2 002_2 ford_I Ikat_1 fel$)

Find the minimal value of S, if x and y are real numbers.

$$S = 2x^2 - xy + y^2 + 2x + 3y.$$

31. feladat (AD$_K EZDOK_2 002_2 ford_I Ikat_2 fel$)

Az ABC háromszög AB oldalával párhuzamos középvonalának egyenesét az Acsúcsból kiinduló belső szögfelezője az M, aB csúcsból kiinduló belső szögfelezője az N pontban metszi. Ugyanígy kapjuk a másik két oldalból kiindulva a KL és PQ szakaszt. Mutassa meg, hogy $2(MN + KL + PQ) = AB + AC + BC$.

1. megoldás (AD$_K EZDOK_2 002_2 ford_I Ikat_2 fel_1 mego$)

Tekintsük először az MN szakaszt! Attól függően, hogy az Més az Npontok a háromszög belsejében, a határán vagy a háromszögön kívül helyezkednek el, hat esetet kell megkülönböztetnünk. Mi ezekből itt csak egyet vizsgálunk meg, a többi eset ugyanígy végiggondolható vagy dolgozhatunk vektorokkal. Legyen az AC felezőpontja F, a BC-é G, és tegyük fel, hogy M és N az FG szakasz belső pontjai.

Az FAM szög egyenlő az MAB szöggel, mert MA szögfelező. A BAM és AMF szögek megegyeznek, mert váltószögek. Így az AMF háromszög egyenlő szárú, tehát

$$MF = FA = \frac{AC}{2} \quad .$$

Hasonlóan látható, hogy $NG = BG = \frac{BC}{2}$.

$\boldsymbol{FG = FM + NG - NM}$**, mivel az** $\boldsymbol{NM}$ **szakasz része az** $\boldsymbol{NG}$ **és** $\boldsymbol{FM}$ **szakaszoknak. Így:**

$$\frac{AB}{2} = \frac{AC}{2} + \frac{BC}{2} - NM.$$

Tehát $\boldsymbol{2NM = BC + AC - AB}$.

Ugyanígy kapjuk, hogy $\boldsymbol{2KL = BC + AB - AC}$ **és** $\boldsymbol{2PQ = AC + AB - BC}$.

Tehát $\boldsymbol{2(NM + KL + PQ) = AB + AC + BC}$**, ami a bizonyítandó állítás.**

32. feladat ($\mathbf{AD}_K EZDOK_2 002_2 ford_I Ikat_2 fel$)

Let $\boldsymbol{ABC}$ **be a triangle, line** l_c **goes through the midpoints of** $\boldsymbol{AC}$ **and** $\boldsymbol{BC}$**. The bisectors from** A **and** B **cut** l_c **at** M **and** N**. The same way we define** $\boldsymbol{KL}$ **on** l_b **and** $\boldsymbol{PQ}$ **on** l_a**. Prove that** $\boldsymbol{2(MN+KL+PQ)=AB+BC+CA}$.

33. feladat ($\mathbf{AD}_K EZDOK_2 002_2 ford_I Ikat_3 fel$)

Bizonyítsa be, hogy van olyan szám, amely a tízes számrendszerben 987654321-re végződik és osztható 2003-mal!

34. feladat ($\mathbf{AD}_K EZDOK_2 002_2 ford_I Ikat_3 fel$)

Prove that there is a multiple of 2003 such that the last digits of it are 987654321 (in the base 10).

35. feladat ($\mathbf{AD}_K EZDOK_2 002_2 ford_I kat_1 fel$)

Egy trapéz kerülete $(18 + 4(\sqrt{3} + \sqrt{6}))$**cm, rövidebbik alapja 3 cm és a hosszabbik alapján fekvő szögek** 60° **és** 45°**. A négy csúcsába rajzolunk egy-egy 1 cm**^{2} **területű négyzetet úgy, hogy négyzetek középpontjai a trapéz csúcsaira illeszkedjenek és egyik oldaluk párhuzamos legyen a trapéz alapjaival. Mekkora a területe annak a síkidomnak,**

amelyet úgy kapunk, hogy a trapézból kivágjuk a négyzeteket?

1. megoldás ($\mathbf{AD}_K EZDOK_2 002_2 ford_I kat_1 fel_1 mego$)

Használjuk az ábra jelöléseit és azt, hogy a 30 ˚, 60 ˚, 90 ˚-os háromszögben az átfogó a 60 ˚ melletti befogó kétszerese, így

$$b = \frac{2x}{\sqrt{3}} \text{ és}$$

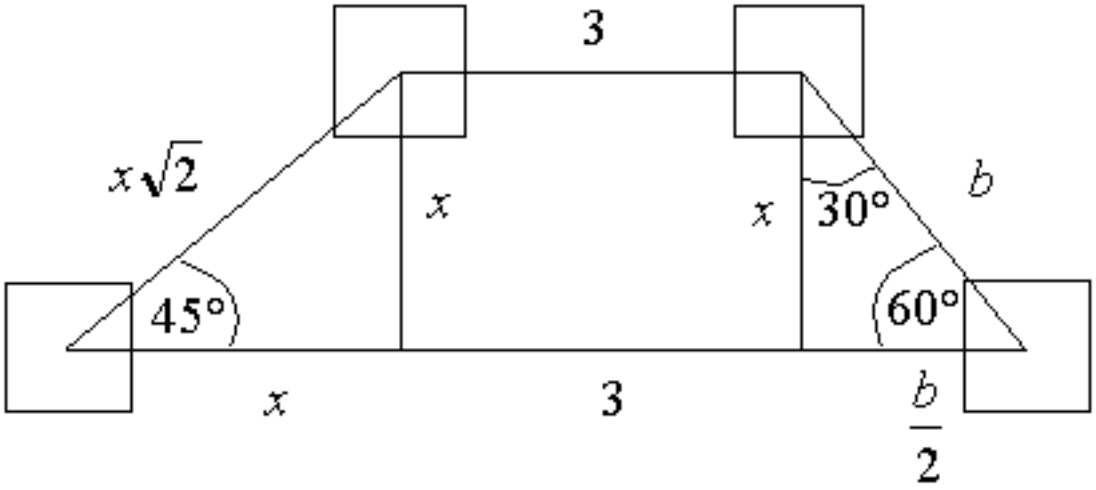
$$x(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 12 + 4(\sqrt{3}+\sqrt{6})$$

$$\textbf{tehát: } a = x + 3 + \frac{x}{\sqrt{3}} = 7 + 4\sqrt{3}.$$

Így a trapéz területe:

$$T = \frac{(a+3)}{2}x = \frac{(10+4\sqrt{3})}{2}4\sqrt{3} = 24 + 20\sqrt{3}$$

Könnyen látható, hogy a kivágott darabokból egy egységnégyzet rakható össze, tehát a kérdezett terület $(23+20\sqrt{3})\mathbf{cm}^2$**.**



4. ábra.

36. feladat ($\mathbf{AD}_K EZDOK_2 002_2 ford_I kat_1 fel$)

The perimeter of a trapezoid *ABCD* is $\left(18+4\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\right)$**, *AB* is parallel to *CD*, *AB*>*CD*. The length of *CD***

is 3, $DAB\angle = 60°$, $ABC\angle = 45°$. We take four unit squares and place them at the vertices of the trapezoid such that A, B, C, D are the centres of the squares and $\boldsymbol{AB}$ is parallel to the side of each little square. Find the area of the polygon which we get from the trapezoid by cutting off the squares.

37. feladat (AD$_K EZDOK_2 002_2 ford_I kat_2 fel$)

Egy egész együtthatós, 2003-adfokú egyenlet egy része nem látszik. A maradó rész: $2x^{2003} + 5x^{2002} + ??? + 14x + 60 = 0$
Tudjuk, hogy az $\frac{5}{7}$; 9; $\frac{3}{2}$; 13; -8 számok között van megoldása az egyenletnek.
Melyik lehet ez a szám és miért? Mit mondhatunk az x^2 együtthatójáról?

1. megoldás (AD$_K EZDOK_2 002_2 ford_I kat_2 fel_1 mego$)

Ha az $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ egész együtthatós egyenlet gyöke $x = \frac{p}{q}$, ahol a p és a q egész számok relatív prímek, akkor ezt behelyettesítve az egyenletbe és szorozva q^n-nel azt kapjuk, hogy: $a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1 \boldsymbol{pq}^{n-1} + a_0 q^n = 0$.

Az utolsó tag kivételével mindegyik osztható p-vel, p és $q$relatív prímek, tehát p osztója a_0-nak. Hasonlóképpen q osztója a_n-nek.

Ezeket felhasználva csak a $\frac{3}{2}$ lehet megoldás.

Ezt beírva az egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$2 \cdot 3^{2003} + 5 \cdot 3^{2002} \cdot 2 + ... + a_2 3^2 \cdot 2^{2001} + 14 \cdot 3 \cdot 2^{2002} + 60 \cdot 2^{2003} = 0$$

Itt az utolsó két tag összege: $81 \cdot 2^{2003}$. Így az a_2-t tartalmazó tag kivételével minden tag osztható 27-tel, ezért a_2 osztható 3-mal.

Könnyen igazolható az is, hogy a_2 lehet bármely 3-mal osztható egész szám.

38. feladat (AD$_K EZDOK_2 002_2 ford_I kat_2 fel$)

The coefficients of the following equation are integers, the degree of it is 2003. One part is invisible:

$$2x^{2003} + 5x^{2002} + ????? + 14x + 60 = 0$$

We know that the equation has a root among $\frac{5}{7}$, 9, $\frac{3}{2}$, 13, -8. **Which one of them can be a root and why? What can we say about the coefficient of** x^2**?**

39. feladat (AD$_K EZDOK_2 002_2 ford_I kat_3 fel)$

Igaz-e, hogy bármely háromszögnek van két olyan oldala, amelyek hosszának különbsége kisebb, mint a háromszög kerületének hatodrésze?

1. megoldás (AD$_K EZDOK_2 002_2 ford_I kat_3 fel_1 mego)$

Jelölje a háromszög oldalainak hosszát a, b, c **és legyen** $a \geq b \geq c$.

I. Ha $a - b \geq b - -c$, **akkor mindkét oldalhoz** $(b - -c)$**-t hozzáadva, felhasználva a** $b > a - c$ **háromszög-egyenlőtlenséget és** $a - b \geq b - c$ **egyenlőtlenségből következő** $a - 2b + c \geq 0$ **egyenlőtlenséget, azt kapjuk, hogy**

$$2(b-c) \leq a - b + b - c = a - c < b \leq b + \frac{a - 2b + c}{3} = \frac{a + b + c}{3}.$$

II. Ha $b - c > a - b$, **akkor hasonlóan kapjuk, hogy:**

$6(a-b) = 4(a-b) + 2(a-b) < 4(a-b) + 2(b-c) = 3(a-c) + a - 2b + c < 3b + a - 2b + c = a + b + c$.

Tehát igaz az állítás.

40. feladat (AD$_K EZDOK_2 002_2 ford_I kat_3 fel)$

Is it true that every triangle has two sides such that the difference of their lengths is smaller than one sixth of the perimeter of the triangle?