1. feladat (AD$_H ALADOK_2 002_1 ford_I Ikat_2 fel$)

Az ABC háromszög BC oldalának C-hez közelebbi harmadolópontja H, AC oldalának C-hez közelebbi negyedelőpontja pedig N. Az AH és BN szakasz a P pontban metszi egymást. Mekkora a $PHCN$ négyszög és az ABP háromszög területének aránya?

1. megoldás (AD$_H ALADOK_2 002_1 ford_I Ikat_2 fel_1 mego$)

Legyen az ABC háromszög területe 1. Legyen $T_{CNP\Delta} = x$ és $T_{CPH\Delta} = y$. $T_{CPB\Delta} = 3y$, mert $CHP\Delta$ területe harmada a $CPB\Delta$ területének, mivel H harmadalópont. $T_{CPA\Delta} = 4x$, mert $CNP\Delta$ területe negyede a $CAP\Delta$ területének, mivel N negyedelőpont. Így az $ABP\Delta$ területe: 1-4x-3y. Az $ANB\Delta$ területének 4/3-szorosa egyenlő az $ABC\Delta$ területével, mivel N C-hez közelebbi negyedelőpont az AC szakaszon. Hasonlóképpen az $ABH\Delta$ területének a 3/2-szerese egyenlő az $ABC\Delta$ területével. Felírva a 2 egyenletet a területekre:

$$\frac{4(1-x-3y)}{3} = 1 \leftrightarrow 4x + 12y = 1$$

valamint

$$\frac{3(1-4x-y)}{2} = 1 \leftrightarrow 12x + 3y = 1$$

Ez két egyenlet, két ismeretlennel. A második egyenlet négyszereséből kivonva az elsőt:

$$44x = 3 \leftrightarrow x = \frac{3}{44}.$$

Ezt az első egyenletbe visszahelyettesítve:

$$1 = \frac{12}{44} + 12y, \;\; y = \frac{2}{33}.$$

A területek aránya:

$$\frac{T_{PHCN}}{T_{ABP}} = \frac{x+y}{1-4x-3y} = \frac{\frac{3}{44}+\frac{2}{33}}{1-4\frac{3}{44}-3\frac{2}{33}} = \frac{17}{72}.$$

2. feladat (AD$_H ALADOK_2 002_1 ford_I Ikat_2 fel$)

Let ABC be a triangle. H is a point on BC such that CH:HB=1:2. N is a point on AC such that CN:NA=1:3. P is the point of intersection of AH and BN.

Determine the ratio of the areas of quadrilateral $PHCN$ and triangle ABP.

3. feladat (AD$_H ALADOK_2 002_1 ford_I Ikat_3 fel$)

Négy számról; a-ról, b-ről, c-ről és d-ről tudjuk, hogy a belőlük képezhető hat darab kéttagú összeg közül három racionális, három pedig irracionális értékű.

a) Racionális szám-e az $a+b+c+d$ összeg?

b) Hány racionális szám lehet a négy szám között?

1. megoldás (AD$_H ALADOK_2 002_1 ford_I Ikat_3 fel_1 mego$)

Felírjuk a 6 db kéttagú összeget 3 sorba ily módon:

$a+bc+d$

$a+cb+d$

$a+db+c$

a) Ha e sorokban levő 4 tagot összegezzük, mindenütt $a+b+c+d$-t kapunk. A feladat szövege miatt mindenképp lesz olyan sor, ahol a két összeg közül 1 racionális, 1 irracionális (skatulya elv). Ezek összege irracionális: tehát $a+b+c+d$ irracionális.

b)

$\diamondsuit$ Mind a 4 szám nem lehet racionális, mert akkor $a+b+c+d$ racionális volna.

$\diamondsuit$ 3 rac. és 1 irrac. Biztos lehet, mert azok az összegek, amiben nem szerepel az irrac. szám, racionálisak lesznek, amiben szerepel az irrac., az irracionális lesz. Így 3 rac. és 3 irrac. összeg lesz.

$\diamondsuit$ 2 rac. és 2 irrac. Nem lehet, mivel 1rac.+1irrac.=irrac. és négy ilyen kombináció van, ezért ekkor 4 irracionális összeg lenne.

$\diamondsuit$ 1 **rac. és 3 irrac. Legyen** a **a racionális.** $a+b$, $a+c$, **és** $a+d$ **irracionális. Emiatt** $b+c$, $b+d$, **és** $c+d$**-nek racionálisnak kell lennie, hogy meg legyen a 3 db rac, 3 db irrac összeg.** $\mathbf{2}(a+b+c+d)$ **irracionális,** $\mathbf{2}a+\mathbf{2}b+\mathbf{2}c+\mathbf{2}d=\mathbf{2}a+(b+c)+(c+d)+(b+d)$**; viszont ezen egyenlet jobb oldalán lévő összes szám racionális, ellentmondásra jutottunk. Tehát ez az eset nem lehetséges.**

$\diamondsuit$ 4 **db irracionális. Lehet, például:**

$$a=2+\sqrt{5},\ b=3-\sqrt{5},\ c=4-\sqrt{5},\ d=5-\sqrt{5}$$

$a+b=$ **5,** $a+c=$ **6,** $a+d=$ **7,**

$$b+c=7-2\sqrt{5},\ b+d=8-2\sqrt{5},\ c+d=9-2\sqrt{5}$$

Tehát vagy 3 racionális és 1 irracionális szám van, vagy mind a négy irracionális.

4. feladat ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 002_1 ford_I Ikat_3 fel$)

We have four numbers $\boldsymbol{a}$**,** $\boldsymbol{b}$**,** $\boldsymbol{c}$ **and** d**. Out of the six numbers** $a+b$**,** $a+c$**,** $a+d$**,** $b+c$**,** $b+d$**,** $c+d$ **three are rational and three are irrational.**

(a) Is the sum $a+b+c+d$ **rational?**

(b) How many rational numbers can be among the four numbers?

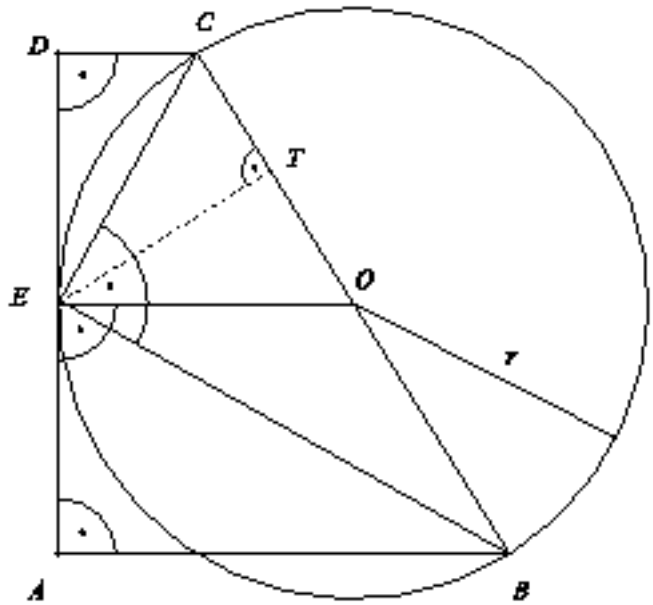
5. feladat ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 002_1 ford_I Ikat_4 fel$)

Az $\boldsymbol{ABCD}$ **trapéz** $\boldsymbol{AD}$ **szára merőleges az** $\boldsymbol{AB}$ **és** $\boldsymbol{CD}$ **alapra. A** $\boldsymbol{BC}$ **átmérőjű** k **kör az** $\boldsymbol{AD}$ **oldalt az** E **pontban érinti. Igazoljuk, hogy** $BE+CE\leq\sqrt{2}\,(AB+CD)$**.**

1. megoldás ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 002_1 ford_I Ikat_4 fel_1 mego$)

Mivel $\boldsymbol{BC}$ **átmérő, a kör középpontját,** O**-t, megkapjuk, ha** E**-ben merőlegest állítunk** $\boldsymbol{AD}$**-re. Ez a merőleges és** $\boldsymbol{CB}$ **metszéspontja** O**.** $\boldsymbol{CO=OB=EO}=r$**.** $\mathbf{2}\boldsymbol{EO=DC+AB}$**, hiszen** $\boldsymbol{EO}$ **a trapéz középvonala (mert** O **felezőpont,** E**-ben pedig derékszög van).**

$$\boldsymbol{DC+AB=2OE=EO+OB.}$$



Ezt beírva a bizonyítandó állításba:

$$BE + CE \leq \sqrt{2}BC$$

Négyzetre emelhetjük, mert mindkét oldal pozitív.

$$\boldsymbol{BE^2 + CE^2 + 2BE \cdot CE \leq 2BC^2}$$

$$\boldsymbol{BE^2 + CE^2 = BC^2}$$

mert $\boldsymbol{CEB}$ háromszögben E-nél derékszög van Thales-tétel miatt. $\boldsymbol{BC^2}$-et levonhatjuk mindkét oldalból: $\boldsymbol{2BE \cdot CE \leq BC^2}$ amit így is írhatunk: $\boldsymbol{2BE \cdot CE \leq 2BC \cdot BC/2}$.

Alulról becsüljük a jobb oldalt, $\boldsymbol{BC/2}$-t kicserélhetjük E-ből $\boldsymbol{BC}$-re állított merőlegesre, mert ez biztosan kisebb-egyenlő, mint $\boldsymbol{BC/2}$. Így ekkor a bal oldal az $\boldsymbol{EBC}\Delta$-nek a négyszeres területe. A jobb oldal szintén ezen háromszög területének négyszerese.

Egyenlőség akkor van, ha $\boldsymbol{ABCD}$ trapéz téglalap. ($\boldsymbol{EO}$ egybeesik $\boldsymbol{ET}$-vel)

6. feladat ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 002_1 ford_I Ikat_4 fel$)

Let $ABCD$ be a trapezoid, AB and CD are parallel, AD is perpendicular to AB. Circle k with diameter BC touches AD at E. Prove that

$$BE + CE \leq \sqrt{2}\,(AB + CD)\,.$$

7. feladat (AD$_H ALADOK_2 002_1 ford_I Ikat_5 fel$)

Mely pozitív egész n értékekre igaz, hogy 2^n+65 értéke négyzetszám?

1. megoldás (AD$_H ALADOK_2 002_1 ford_I Ikat_5 fel_1 mego$)

2^n+65=b^2

1. eset: n=2k+1

2^n: 2-re vagy 8-ra végződik.

+65: 3-ra vagy 7-re végződik. Viszont négyzetszám csak 0,1,4,5,6 vagy 9-re végződhet.

2. eset: n=2k

2^{2k}+65=b^2 65=b^2-2^{2k} 65=(b+2^k)(b-2^k)

Mivel a szorzat mindkét tényezője egész, és az első a nagyobb, ezért a 65 prímtényezős felbontásából a szorzat csak 65·1 vagy 13·5 lehet.

a) 65·1

b+2^k + b-2^k=66 2b=66 b=33 ebből k=5, n=10.

b) 13·5

b+2^k + b-2^k=18 2b=18 b=9 ebből k=2, n=4.

Tehát n=4, és n=10-re igaz az állítás.

8. feladat (AD$_H ALADOK_2 002_1 ford_I Ikat_5 fel$)

Find the positive integer n for which 2^n+65 is a perfect square.