1. feladat (AD$_H ALADOK_2 002_3 ford_I Ikat_1 fel$)

Határozzuk meg azokat az x_1, x_2,.... x_n pozitív számokat, amelyekre teljesülnek az

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = 3,$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + 1\frac{1}{x_n} = 3$$

összefüggések.

1. megoldás (AD$_H ALADOK_2 002_3 ford_I Ikat_1 fel_1 mego$)

Az x_1, x_2, ..., x_n pozitív számokat keressük.

I.

$$x1 + x2 + ... + xn = 3,$$

II.

$$\frac{1}{x1} + \frac{1}{x2} + ... + 1\frac{1}{xn} = 3,$$

Tekintsük a két egyenlet összegét:

$$x1 + \frac{1}{x1} + x2 + \frac{1}{x2} + ... + xn + \frac{1}{xn} = 6$$

Ez n darab számnak és reciprokának az összege, és mivel tudjuk, hogy egy pozitív számnak és reciprokának összege legalább 2, ezért n maximum 3 lehet.

Vizsgáljuk az

n = 1 esetet:

x_1 = 3

$$\mathbf{1}/x_1 = \mathbf{3}$$

Nem lehetséges.

n = 2:

$x_1 + x_2$ = 3

x_1 = 3 $- x_2$

$$\frac{1}{x1} + \frac{1}{x2} = 3$$

$$\frac{1}{3 - x2} + \frac{1}{x2} = 3$$

$$\mathbf{3} \ = \ \mathbf{9}x2 - 3x_2^2$$

$$x_2^2 - 3x_2 + 1 = 0$$
$$x_{2_1} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Ez nagyobb, mint 3, ezért $x_1 < 0$, ami nem megoldás, mivel mi pozitív számokat keresünk.

$$x_{2_2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3-\sqrt{5}}$$

n **= 3:**

$$x1 + \frac{1}{x1} + x2 + \frac{1}{x2} + x3 + \frac{1}{x3} = 6$$

Ekkor mind a három számnak és reciprokának összege 2, tehát mind a három szám 1.

Tehát a megoldás:

n **= 3,** $x_1 = x_2 = x_3$**=1 vagy**

$$n = 2,\ x_1 = \frac{2}{3-\sqrt{5}},\ x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

2. feladat (AD$_H ALADOK_2 002_3 ford_I Ikat_1 fel$)

Find the positive solutions of the following equation system:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = 3, \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} = 3.$$

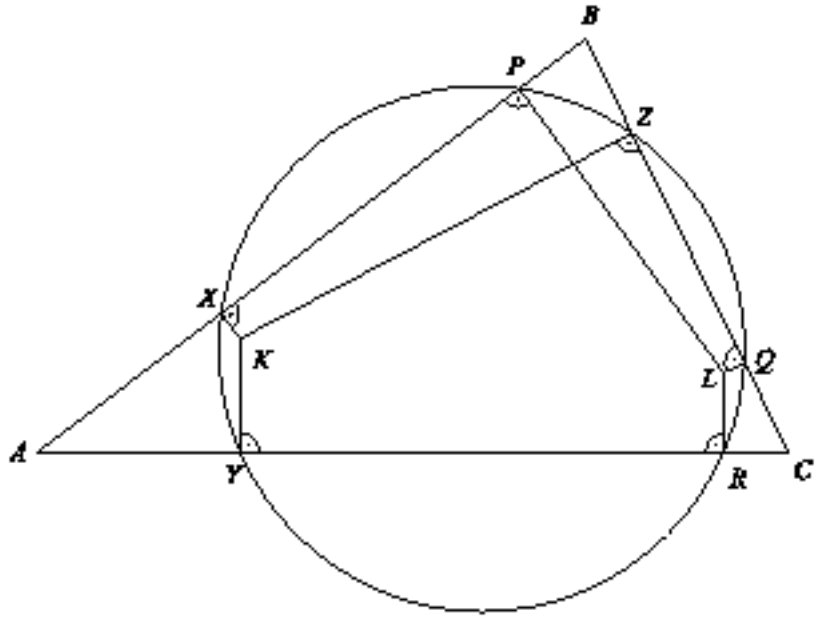
3. feladat (AD$_H ALADOK_2 002_3 ford_I Ikat_2 fel$)

Az ABC háromszög tetszőleges belső pontjából merőlegeseket állítunk az oldalakra. A kapott három talppont által meghatározott háromszög köréírt köre az eredeti háromszög oldalait három pontban metszi: az AB oldalt P-ben, a BC oldalt Q-ban , az AC oldalt R-ben.

Bizonyítsuk be, hogy a P-n átmenő AB-re merőleges egyenes, a Q-n átmenő BC-re merőleges egyenes

és az R ponton átmenő AC-ra merőleges egyenes közös pontban metszik egymást.

1. megoldás ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 002_3 ford_I Ikat_2 fel_1 mego$)



Legyenek X, Y, Z a háromszög belsejében adott K pontból az oldalakra állított merőlegesek talppontjai. Az XK egyenes a PX húr felezőmerőlegesére tükrözve a PL egyenesbe megy át, így PL egyenes tekinthető a KX egyenes XYZ háromszög köréírt körének középpontjára való tükörképének. Hasonlóképpen KY RL-be, KZ QL-be. Mivel a kör középpontra való tükrözés előtt KX, KY és KZ egyenesek egy ponton mentek át, ezért a tükrözés után tükörképeik is egy ponton fognak átmenni, erre az állítást beláttuk.

4. feladat ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 002_3 ford_I Ikat_2 fel$)

Let ABC be a triangle, we take an inner point and draw the pedal triangle of it. The circumcircle of this pedal triangle meets AB, BC and CA at$P$,Q and$R$ respectively. Prove that PQR is also a pedal triangle.

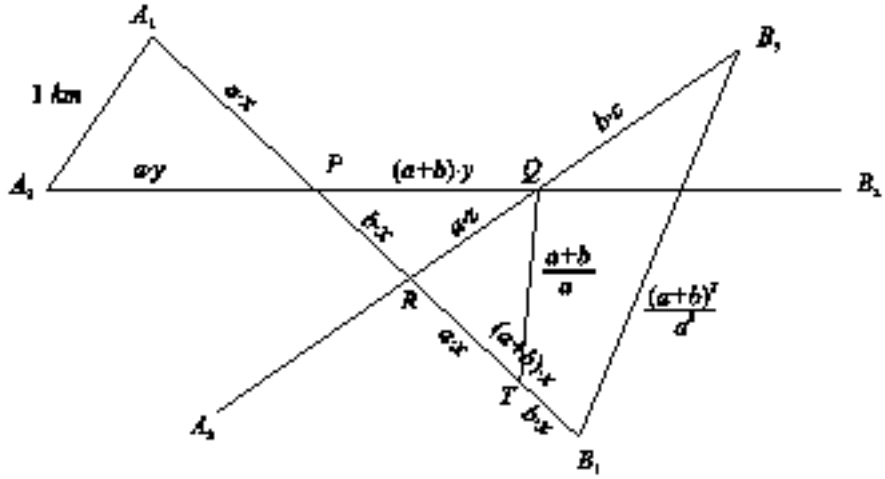
5. feladat (**AD**$_H ALADOK_2 002_3 ford_I Ikat_3 fel$)

Egy síkbeli terepen hat város között 6 út vezet. Az első A_1-ből B_1–be, a második A_2-ből B_2–be, a harmadik pedig A_3-ből B_3–ba. A_i-ből (i = 1, 2, 3) egyszerre indul el f_i futár (i = 1, 2, 3) a B_i városba (i = 1, 2, 3), ahol mindegyik futár állandó sebességgel halad.

A közös indulás után a óra elteltével f_1 és f_2 találkozik, majd ezután b óra elteltével f_1 és f_3 találkozik, majd ismét a óra elteltével f_2 és $f_3$mennek el egymás mellet, végül újabb b óra múlva mindhárman egyszerre érnek célba.

Milyen messze lehet B_1 B_3–tól, ha a > 0, b > 0 és A_1A_2 = 1km?

1. megoldás (**AD**$_H ALADOK_2 002_3 ford_I Ikat_3 fel_1 mego$)



Legyen $f_1$futár sebessége x,f_2-é y, és f_3-é z. f_1 és f_2 találkozzon a P pontban, f_1 és f_3 az R pontban, f_2 és f_3 a Q pontban. Így az A_1P szakasz hossza $a \cdot x$, a $\boldsymbol{PR}$ szakasz hossza $b \cdot x$, a $\boldsymbol{RB}_1$ szakasz hossza $(a+b) \cdot x$, az A_2P szakasz hossza $a \cdot y$, a $\boldsymbol{PQ}$ szakasz hossza $(a+b) \cdot y$, a $\boldsymbol{QB}_3$

szakasz hossza $b \cdot z$, a $\boldsymbol{QR}$ szakasz hossza $a \cdot z$. Legyen T a $\boldsymbol{QB}_1$ szakasz a:b arányú osztópontja. Mivel az $A_1\boldsymbol{PA}_2$ és a $\boldsymbol{QPT}$ szög egyenlő nagyságú, és a közrefogó oldalak aránya megegyezik, ezért az $A_1\boldsymbol{PA}_2$ és a $\boldsymbol{QPT}$ háromszög hasonló, a hasonlóság aránya a:$(a+b)$. Ennek alapján az $\boldsymbol{RT}$ szakasz hossza $\frac{a+b}{a}$. A $\boldsymbol{QRT}$ és a $B_3\boldsymbol{RB}_1$ háromszögben a $B_3\boldsymbol{RB}_1$ és a $\boldsymbol{QRT}$ szög és a közrefogó oldalak aránya megegyezik, ezért ez a két háromszög is hasonló. A hasonlóság aránya a:$(a+b)$, ezért a B_1B_3 szakasz hossza

$$\left(\frac{a+b}{a}\right)^2.$$

6. feladat (AD$_H ALADOK_2 002_3 ford_I Ikat_3 fel$)

Six towns are situated in a flat area. There are three straight roads; one from A_1 to B_1, one from A_2 to B_2 and one from A_3 to B_3. Every day a courier c_i sets off from A_i to B_i at the same time (i=1, 2, 3). Their speeds are constant.

During their mission c_1 and c_2 meet a hours after the common departure time, $b$hours later c_1 and c_3 meet, and again a hours after that c$_2$ and c_3 meet. Finally b hours later all of them arrive at their destination. Find the distance of $B_1$and B_3 if a >0, b >0 and A_1A_2=1km.

7. feladat (AD$_H ALADOK_2 002_3 ford_I kat_1 fel$)

Az a, b, c számok pozitív egészek, ahol

$$c = \frac{ab}{a+b}.$$

Határozzuk meg az $(a; b; c)$ számhármasokat úgy, hogy a számhármasok tagjai között a lehető legtöbb prímszám legyen.

1. megoldás (AD$_H ALADOK_2 002_3 ford_I kat_1 fel_1 mego$)

a és b nyilván nem lehet egyszerre páratlan prím, mert akkor az egyenletünk jobb oldalán a számlálóban páratlan, a nevezőben páros szám állna. Emiatt ha a és b is prím, akkor az egyik 2. A szimmetria miatt (a és b szerepe felcserélhető) feltehetjük, hogy $a = 2$. Ekkor

$$c = \frac{2b}{2+b} = \frac{2b+4-4}{2+b} = 2 - \frac{4}{2+b}$$

Ebből következőleg b egyetlen lehetséges értéke esetünkben 2 (ha $b > 2$, akkor a tört értéke nem egész, és 2-nél kisebb pozitív prím nincs). Ekkor $c = 1$ adódik. Emiatt kijelenthetjük: mindhárom szám nem lehet prím, de kettő igen.

Lehet még, hogy c és a jobboldalon álló számok egyike prím, a szimmetria miatt legyen ez a, de ez esetben $a \neq 2$-t is kiköthetjük, hiszen az $a = 2$ esetet már tárgyaltuk. Ekkor nyilván b-nek párosnak kell lennie (a megoldás elején elmondottakhoz hasonló okból), ezek szerint $b = 2k$, ahol k 1-nél nagyobb egész szám (b sem lehet 2). Ekkor

$$c = \frac{2k \cdot a}{2k+a}$$
$$ac = 2k(a-c)$$

Mivel a jobboldal páros, nyilván a baloldalnak is annak kell lennie, és úgy, hogy c prím legyen, ez csak $c = 2$ esetén lehetséges. Ekkor viszont

$$k = \frac{a}{a-2}$$

a páratlan, és mivel az egymást követő páratlan számpárok tagjai relatív prímek egymáshoz, k csak $a = 3$ esetén lesz egész. Ebből $a = 3$, $b = 6$, $c = 2$ adódik, és természetesen ennek a szimmetrikus párja, $a = 6$, $b = 3$, $c = 2$ is jó megoldás.

A feladatnak ezek szerint három számpár a megoldása, ezek:

$a = 2$ $b = 2$ $c = 1$
$a = 3$ $b = 6$ $c = 2$
$a = 6$ $b = 3$ $c = 2$

8. feladat (AD$_H ALADOK_2 002_3 ford_I kat_1 fel$)

Let a, b, cdenote positive integers such that $c = \frac{ab}{a+b}$. Find the triple (a, b, c) for which the number of primes in the triple is maximal.

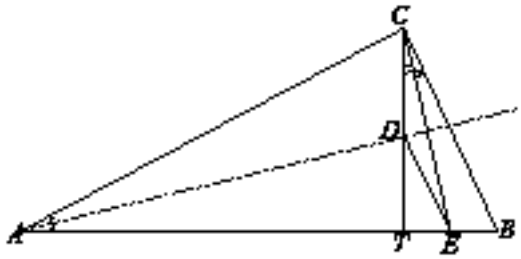
9. feladat (AD$_H ALADOK_2 002_3 ford_I kat_2 fel$)

Az ABC háromszögben $BC \leq CA < AB$, ahol a C csúcsból induló magasság talppontja T.

A BAC szög szögfelezője a CT magasságot a D pontban, a BCT szög szögfelezője az AB oldalt E-ben metszi.

Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha az ED szakasz párhuzamos a BC oldallal.

1. megoldás (AD$_H ALADOK_2 002_3 ford_I kat_2 fel_1 mego$)



A feladatot két részben kell megoldanunk.

a) Lássuk be, hogy ha ABC háromszög derékszögű, BC párhuzamos ED-vel.

b) Lássuk be, hogyha ABC háromszögben BC párhuzamos ED-vel, akkor az a háromszög derékszögű.

a) Ekkor a feladat állítása miatt a háromszög nyilván C-nél derékszögű. Emiatt ACT és BCT háromszögek szögeik egyenlősége miatt hasonlók, és D ugyanolyan arányú osztópontja CT-nek, mint E BT-nek. Ezért állításunk a BTC szögre felírt párhuzamos szelők tételének megfordításából következőleg igaz.

b) Ekkor a $\boldsymbol{BCT}$ szögre felírt párhuzamos szelők tételéből következőleg D olyan arányban osztja $\boldsymbol{CT}$-t, mint E $\boldsymbol{BT}$-t. Emiatt hasonló egymáshoz az $\boldsymbol{ACT}$ és a $\boldsymbol{BCT}$ háromszög, hiszen a megfelelő belső szögfelező tételekből látszik, hogy megegyezik két-két oldaluk aránya, és ezek közül a nagyobbikkal szemközt egyenlő szög: derékszög van. Ekkor $\boldsymbol{CAT}\angle + \boldsymbol{TCA}\angle = 90^\circ$, és $\boldsymbol{TCB}\angle = \boldsymbol{TAC}\angle$, ebből pedig $\boldsymbol{ABC}$ háromszög derékszögűsége következik.

10. feladat ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 002_3 ford_I kat_2 fel$)

In triangle $\boldsymbol{ABC}$ $BC \leq CA < AB$. Denote the foot of the altitude from C with T. The bisector of $BAC\angle$ meets $\boldsymbol{CT}$ at D and the bisector of$BCT\angle$ meets $\boldsymbol{AB}$ at E. Prove that $\boldsymbol{ABC}$ has a right angle if and only if $\boldsymbol{ED}$ is parallel to $\boldsymbol{BC}$.

11. feladat ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 002_3 ford_I kat_3 fel$)

Egy országban, sík terepen hat város között három egyenes út vezet. Az első A_1-ből B_1-be, a második A_2-ből B_2-be, a harmadik pedig A_3-ból B_3-ba.

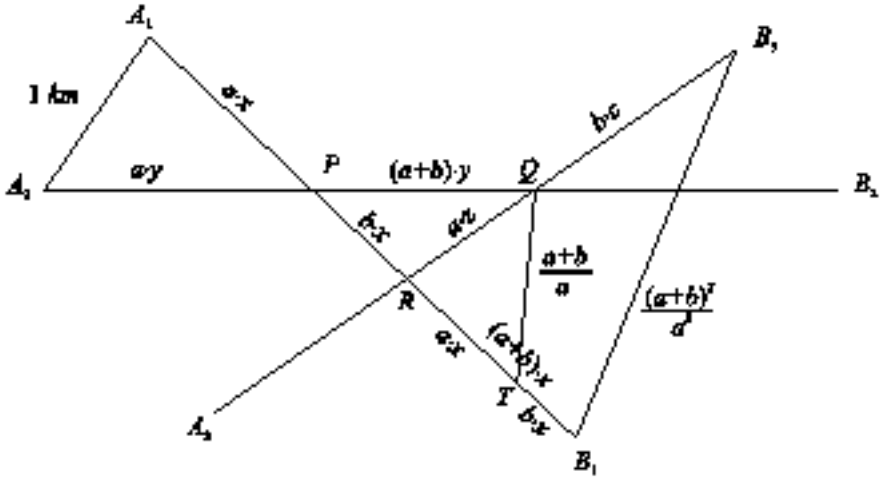
A_i-ből minden reggel 8 órakor elindul egy f_i futár, aki állandó sebességgel haladva pontosan délben érkezik B_i-be (i= 1, 2, 3).

Az út során f_1 és f_2 9 órakor találkozik, f_1 és f_3 10 órakor, f_2 és f_3 pedig 11 órakor.

Milyen hosszú a B_1B_3 távolság, ha A_1 és A_2 1 km-re, A_2 és A_3 pedig 3 km-re fekszik egymástól?

1. megoldás ($\mathbf{AD}_H ALADOK_2 002_3 ford_I kat_3 fel_1 mego$)

Legyen $f_1$futár sebessége x,f_2-é y, és f_3-é z. f_1 és f_2 találkozzon a P pontban, f_1 és f_3 az R pontban, f_2 és f_3 a Q pontban. Így az A_1P szakasz hossza $a \cdot x$, a $\boldsymbol{PR}$ szakasz hossza $b \cdot x$, a $\boldsymbol{RB}_1$ szakasz hossza $(a+b) \cdot x$, az A_2P szakasz hossza $a \cdot y$, a $\boldsymbol{PQ}$ szakasz hossza $(a+b) \cdot y$, a $\boldsymbol{QB}_3$ szakasz hossza $b \cdot z$, a $\boldsymbol{QR}$ szakasz hossza $a \cdot z$. Legyen T a



$\boldsymbol{QB}_1$ szakasz a:b arányú osztópontja. Mivel az $A_1\boldsymbol{PA}_2$ és a $\boldsymbol{QPT}$ szög egyenlő nagyságú, és a közrefogó oldalak aránya megegyezik, ezért az $A_1\boldsymbol{PA}_2$ és a $\boldsymbol{QPT}$ háromszög hasonló, a hasonlóság aránya a:$(a+b)$. Ennek alapján az $\boldsymbol{RT}$ szakasz hossza $\frac{a+b}{a}$. A $\boldsymbol{QRT}$ és a $B_3\boldsymbol{RB}_1$ háromszögben a $B_3\boldsymbol{RB}_1$ és a $\boldsymbol{QRT}$ szög és a közrefogó oldalak aránya megegyezik, ezért ez a két háromszög is hasonló. A hasonlóság aránya a:$(a+b)$, ezért a B_1B_3 szakasz hossza

$$\left(\frac{a+b}{a}\right)^2.$$

12. feladat (**AD**$_H ALADOK_2 002_3 ford_I kat_3 fel$)

Alex, Bob and Charlie play the following game. First Alex and Charlie produce a set of 3×3 tables. In every little square of the 3×3 tables there is either a 0 or a 1.

Charlie leaves the room and Alex chooses one table from the set and writes it on the board. (Of course he did not tell Charlie which one.) Bob may change one number in the table. If it is a 0

he writes a 1, if it is a 1 he writes a 0 instead. It is not compulsory for Bob to change a number. Now comes Charlie and he has to find out the original table written on the board.

(a) Prove that Alex and Charlie can produce a set of 26 tables such that independently of the choice of Alex and the change of Bob, Charlie is able to find out the original table written on the board.

(b) Prove that if there are 52 tables in the initial set and Alex writes any of them on the board then it is not sure that Charlie can find it out after Bob's change.