Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2012/2013

Matematika I. kategória (SZAKKÖZÉPISKOLA)

1. (iskolai) forduló

1. Az n pozitív egész számnak pontosan két pozitív osztója van, az $n+1$-nek pedig pontosan három.

   Hány pozitív osztója van az $n+2012$ számnak?

2. Elhelyezhető-e a térben 11 pont úgy, hogy az általuk meghatározott egyenesek száma 53 legyen? Lehet-e a 11 pont által meghatározott egyenesek száma 54? Állítását indokolja!

3. Oldja meg a pozitív egész számokból álló számhármasok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

   (a) $x+y+z=12$,

   (b) $xy+xz+yz=47$.

4. A nem egyenlőszárú ABC háromszögben $BC>CA$. Az AB oldal F felezőpontján keresztül húzzunk párhuzamost a C pontbeli belső szögfelezővel, ez az egyenes az AC egyenest a P, a BC egyenest a Q pontban metszi. Bizonyítsa be, hogy

$$\frac{BC}{AC}-\frac{PQ}{QF}=1!$$

5. Oldja meg a valós számok halmazán a

$$\frac{\sqrt{2012-503x}-|3x-2|}{\sqrt{2x+12}-|3x-2|}\le 1$$

   egyenlőtlenséget!

6. Az x és y pozitív valós számok szorzata 50, továbbá teljesül, hogy $x>y$. Határozza meg az $\frac{x^2+y^2}{x-y}$ kifejezés minimumának értékét!

   Adja meg az $\frac{x}{y}$ aránynak azt az értékét, amelyre a kifejezés a minimumát valóban felveszi!

Minden feladat megoldásának pontos leírásáért 10 pont adható.

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
2012-2013. tanévi első fordulójának feladatai
matematikából, a II. kategória számára

1. Mely x és y valós számok elégítik ki a $\sqrt{x} = 2 - y$, $\sqrt{y} = x - 2$ egyenletrendszert?

2. Egy négyzetet az egyik csúcsából induló két egyenes három egyenlő területű részre oszt.

(a) Milyen arányú részekre osztja a két egyenes négyzetbe eső szakaszát a szakaszokat metsző átló?

(b) Legyen a négyzetbe írt kör területe T, a két egyenes és az őket metsző átló által bezárt háromszög beírt körének területe t. Határozzuk meg $T : t$ értékét.

3. Hányféleképpen juthatunk a koordinátarendszer origójából a (4;2) pontba, ha 10 lépést teszünk, minden lépésünk egységnyi hosszú és párhuzamos a tengelyek valamelyikével?

4. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n esetén teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{20}}{9} + \frac{\sqrt{42}}{13} + ... + \frac{\sqrt{2n(2n+1)}}{4n+1} < \frac{n}{2}$$

5. Igazoljuk, hogy a rekurzióval definiált alábbi sorozat minden tagja pozitív egész szám.

$$c_1 = 1, \quad c_{n+1} = \frac{4n-2}{n+1} \cdot c_n \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

Valamennyi feladat 7 pontot ér.