# Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2005-2006. tanévi harmadik, döntő fordulójának feladatai matematikából, a II. kategória számára

Budapest, 2006. március 2.

1. A nemnegatív egészeken értelmezett $t(n)$ függvényre $t(0) = t(1) = 0$, $t(2) = 1$, ha $n > 2$, akkor $t(n)$ a legkisebb olyan pozitív egész, amely nem osztja az $n$ számot. Legyen $T(n) = t(t(t(n)))$. Határozzuk meg $S$ értékét, ha

$$S = T(1) + T(2) + \ldots + T(2005) + T(2006)$$

2. Építünk egy, az $A$ kezdőpontból induló, összesen 2006 darab útszakaszból álló áthálózatot, amely körutat nem tartalmaz. (Ezt úgy értjük, hogy a hálózat bármely pontjából bármely másik pontjába pontosan egy módon juthatunk el egymáshoz csatlakozó útszakaszokon.) Bármely két útszakasznak nincs közös belső pontja és legfeljebb egy végpontjuk közös. Az úthálózat egyik pontjába egy értéktárgyat rejtettünk el. Az $A$ kezdőpontból elindul egy játékos, aki ezt szeretné megtalálni. Minden elágazásnál az onnan induló, még be nem járt útszakaszok közül egyenlő valószínűséggel választja ki, merre menjen tovább. Visszafordulnia nem szabad útja során.

   Az úthálózatot úgy építettük meg, hogy a legkisebb legyen a valószínűsége annak, hogy a játékos megtalálja az értéktárgyat. Mekkora ez a minimális valószínűség?

3. Adott a síkon egy $K$ középpontú egységsugarú kör és egy ezt nem metsző $e$ egyenes. $K$-ból az $e$ egyenesre emelt merőleges talppontja $O$, $KO = 2$. Legyen $H$ azoknak a köröknek a halmaza, amelyeknek a kezdőpontja $e$-n van és kívülről érinti a $K$ középpontú egységkört.

   Bizonyítsuk be, hogy van a síkon olyan $P$ pont, amelyből $H$ minden körének $e$-n lévő átmérője ugyanakkora, 0 foknál nagyobb szögben látszik. Határozzuk meg $P$ helyzetét és a látószög mértékét.

Valamennyi feladat 7 pontot ér.