A döntő feladatai

1. Melyek azok az $(a; b; c)$ rendezett valós számhármasok, amelyekre ha az a, b, c bármelyikét kivonjuk a másik kettő szorzatából, úgy 2007-et kapunk?

2. Adott egy parabola és síkjában a P külső pontból húzott két érintő, rajtuk az A illetve B érintési ponttal. A parabola az ABP háromszöget egy X területű konvex és egy Y területű konkáv részre osztja. Igazoljuk, hogy az $X : Y$ arány nem függ a külső P pont megválasztásától.

3. Egy négyzetet oldalaival párhuzamos egyenesekkel 16 egybevágó négyzetre bontunk. Ezeket a négyzeteket pirosra vagy kékre színezhetjük a következő módon: egyszerre egy 2×2-es vagy 3×3-as (az oldalakkal párhuzamos) négyzet 4 illetve 9 négyzetének színeit változtathatjuk ellenkezőre. Kezdetben mind a 16 négyzet piros.

(a) Az előbbi lépések egymásutáni alkalmazásaival elérhető-e, hogy a felső sor balról második négyzete kék, a többi 15 négyzet piros legyen?

(b) Bizonyítsuk be, hogy legfeljebb 2^{12} féle színezés lehetséges. A forgatással és/vagy tükrözéssel egymásba vihető színezéseket is különbözőknek tekintjük.

Valamennyi feladat helyes megoldása 7 pontot ér.

A döntő feladatainak megoldásai

1. Melyek azok az $(a;b;c)$ rendezett valós számhármasok, amelyekre ha az a, b, c bármelyikét kivonjuk a másik kettő szorzatából, úgy 2007-et kapunk?

Megoldás: A feladat feltételei alapján:

$$(1) \quad ab - c = 2007, \qquad (2) \quad ac - b = 2007, \qquad (3) \quad bc - a = 2007.$$

Vonjuk ki (1) jobb és bal oldalából (2) megfelelő oldalát, majd alakítsunk szorzattá:

$$(4) \qquad ab - ac - c + b = (a+1)(b-c) = 0.$$

Szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. Ha $a = -1$, akkor (1) alapján $c = -2007 - b$, ezt helyettesítjük a (3) alapján kapott $bc - 2006 = 0$ egyenletbe. Ekkor $b(-2007 - b) - 2006 = (-2006 - b)(b + 1) = 0$, amiből $b = -2006$, vagy $b = -1$. Az $(a;b;c)$ megoldásaink: (-1;-1;-2006), illetve ennek más sorrendjei (-1;-2006;-1;) és (-2006;-1;-1). Mivel a három változó szerepe szimmetrikus, megkaptuk az összes olyan megoldást, amikor közülük az egyik -1.

3 pont

A továbbiakban egyik változó se legyen -1, ekkor (4) miatt $b - c = 0$. Tehát $b = c$, de ugyanígy következik $c = a$ és $a = b$ is szerepcserével. A megoldandó egyenlet ekkor b-vel felírva:

$$b^2 - b = 2007.$$

Ennek megoldásai:

$$b_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{8029}}{2}.$$

Az így adódó $(a;b;c)$ megoldások:

$$\left(\frac{1+\sqrt{8029}}{2}; \frac{1+\sqrt{8029}}{2}; \frac{1+\sqrt{8029}}{2}\right) \qquad \text{és} \qquad \left(\frac{1-\sqrt{8029}}{2}; \frac{1-\sqrt{8029}}{2}; \frac{1-\sqrt{8029}}{2}\right).$$

Öt olyan rendezett számhármas van, amely a feladat feltételeinek eleget tesz.

4 pont

Összesen: 7 pont

2. Adott egy parabola és síkjában a P külső pontból húzott két érintő, rajtuk az A illetve B érintési ponttal. A parabola az ABP háromszöget egy X területű konvex és egy Y területű konkáv részre osztja. Igazoljuk, hogy az $X : Y$ arány nem függ a külső P pont megválasztásától.

Megoldás: Mivel bármely két parabola hasonló, elegendő az állítást a derékszögű koordinátarendszer $y = x^2$ parabolájára belátni. 1 pont

Legyenek A és B koordinátái rendre (a, a^2) és (b, b^2), ahol $a < b$ feltehető. Az A és B pontbeli érintők meredeksége rendre $2a$ és $2b$. Az érintők egyenlete

$$y - a^2 = 2a(x - a) \qquad \text{és} \qquad y - b^2 = 2b(x - b).$$

E két egyenes metszéspontja P, koordinátái az előző két egyenletből adódóan $\left(\frac{a+b}{2}, ab\right)$.

2 pont

Az A és B pontokon áthaladó egyenes egyenlete $(a+b)x - y - ab = 0$. Ezt normáljuk, behelyettesítjük P koordinátáit, így megkapjuk az ABP háromszög P-hez tartozó magasságát:

$$\frac{(a+b)\frac{a+b}{2} - ab - ab}{\sqrt{(a+b)^2+1}} = \frac{(b-a)^2}{2\sqrt{(a+b)^2+1}}.$$

Ennek felét megszorozzuk az AB szakasz hosszával, így megkapjuk az ABP háromszög területét:

$$T_{ABP} = \frac{(b-a)^2}{4\sqrt{(a+b)^2+1}}\sqrt{(b^2-a^2)^2+(b-a)^2} = \frac{(b-a)^3}{4}.$$

(Az A, B, P pontok ismeretében az ABP háromszög területe azonnal felírható, erre hivatkozhat bizonyítás nélkül is. Megoldható több más módon, pl. vektoriális szorzással, determinánssal, téglalapba foglalással.)

1 pont

Számoljuk ki a konvex rész X területét. Legyen A' és B' rendre $(a, 0)$ és $(b, 0)$.

$$X = T_{AA'B'B} - \int_a^b x^2 dx = (b-a)\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{1}{3}(b^3 - a^3) = \frac{(b-a)^3}{6}.$$

2 pont

Az ABP háromszög és X ismeretében Y értéke: $Y = T_{ABP} - X$. A keresett arány ezek szerint nem függ az a és b paraméterektől, bármely külső P pont esetén

$$X : Y = X : (T_{ABP} - X) = 2 : 1.$$

1 pont

Összesen: 7 pont

3. Egy négyzetet oldalaival párhuzamos egyenesekkel 16 egybevágó négyzetre bontunk. Ezeket a négyzeteket pirosra vagy kékre színezhetjük a következő módon: egyszerre egy 2×2-es vagy 3×3-as (az oldalakkal párhuzamos) négyzet 4 illetve 9 négyzetének színeit változtathatjuk ellenkezőre. Kezdetben mind a 16 négyzet piros.

(a) Az előbbi lépések egymásutáni alkalmazásaival elérhető-e, hogy a felső sor balról második négyzete kék, a többi 15 négyzet piros legyen?

(b) Bizonyítsuk be, hogy legfeljebb 2^{12} féle színezés lehetséges. A forgatással és/vagy tükrözéssel egymásba vihető színezéseket is különbözőknek tekintjük.

Megoldás: (a) Megszámozzuk a négyzeteket az ábra szerint:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Összesen 9 féle 2×2-es és 4 féle 3×3-as változtatás lehetséges, összesen 13. Jelölje őket V_i, $1 \leq i \leq 13$. Tekintsük a következő 8 négyzetet, melyek számai: 2, 3, 5, 9, 8, 12, 14 és 15. Minden V_i ezek közül páros soknak változtatja meg a színét, ezért a 8 négyzet között a pirosak száma mindig páros marad. Ezért nem érhető el, hogy a 2-es számú négyzet kék, az összes többi piros. 3 pont

(b) Ha bármely V_i-t kétszer elvégezzük, az elhagyható a lépéssorozatból, hiszen nem változtat semmit. Egy lépéssorozaton belül a V_i-k sorrendje tetszőlegesen megváltoztatható, hiszen minden mező pontosan annyiszor vált színt, ahányszor szerepel a lépéssorozatot alkotó változtatásokban. Ezek szerint minden lépéssorozat megfeleltethető a 13 fajta változtatás egy részhalmazának, melyben pontosan azok a V_i-k szerepelnek, amelyek a lépéssorozatban páratlan sokszor fordultak elő. Az ilyen részhalmazok száma 2^{13}, ennél több lehetséges színezés nem lehet. 1 pont

Megmutatjuk, hogy a részhalmazok párokba állíthatók úgy, hogy a pár mindkét tagja ugyanazt a színezést eredményezi. Így a lehetőségek számát elfelezzük és a (b) rész állítását kapjuk.

Minden részhalmaznak legyen a párja a komplementere. Minden mező színét az összes közül éppen páros sok V_i változtatja meg. Az 1, 4, 13, 16 sarokmezőket egy 2×2-es és egy 3×3-as; az (a) részben vizsgált mezőket két-két 2×2-es és két 3×3-as; a középen levő 6, 7, 10, 11 mezőket négy 2×2-es és mind a négy 3×3-as. Ezért minden egyes mező esetén ha az őt változtató V_i-k közül páros sok van egy részhalmazban, akkor páros sok van a komplementerben is, ilyenkor sem a részhalmaznak, sem a komplementernek megfelelő lépéssorozat után nem változik az adott mező színe. Ha pedig az őt változtató V_i-k közül páratlan sok van egy részhalmazban, akkor páratlan sok van a komplementerben is, így a megfelelő lépéssorozatok után mindkétszer megváltozik az adott mező színe. A párok ugyanazt a színezést adják minden mezőre, tehát az egész négyzetre is, ezzel a bizonyítást befejeztük.

3 pont

Összesen: 7 pont