A döntő feladatai

1. Bizonyítsuk be, hogy bármely H háromszöghöz található olyan e egyenes, hogy H-nak az e-re vonatkozó tükörképe H területének több, mint a $3/4$ részét lefedi.

2. Jelölje p_i az i-edik prímszámot, és legyen $Q_k = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$. (Tehát pl. $Q_4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$.) Igazoljuk, hogy az $1, 2, \ldots, Q_k$ számok között pontosan $Q_k/2$ darab olyan van, amely a $p_1, \ldots, p_k$ közül páratlan sokkal osztható.

3. Adottak az n és k pozitív egészek, ahol $n \geq k+2$. Legyenek továbbá az n elemű H halmaznak $A_1, \ldots, A_m$ olyan k elemű részhalmazai, hogy

(1) H minden egyelemű részhalmaza előáll néhány A_i metszeteként; de

(2) az A_i-k közül bármelyiket elhagyva (1) már nem teljesül.

(a) Mutassuk meg, hogy $m \leq kn$.

(b) Lássuk be, hogy az A_i-k alkalmas megválasztásával $m \geq kn - k^2$ elérhető.

A döntő feladatainak megoldásai

1. feladat.

Bizonyítsuk be, hogy bármely H háromszöghöz található olyan e egyenes, hogy H-nak az e-re vonatkozó tükörképe H területének több, mint a $3/4$ részét lefedi.

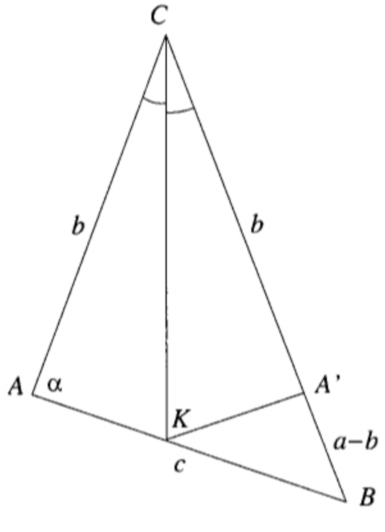
Megoldás: Használjuk az ábra jelöléseit. Legyenek H oldalai $a \geq b \geq c$, és tükrözzük H-t a C-ből induló $f_c = CK$ szögfelezőre. Ekkor H-nak és a tükörképének a közös része a $D = ACA'K$ deltoid, ahol A' az A tükörképe. Ekkor a területekre

$$\frac{t_D}{t_H} = \frac{2 \cdot t_{ACK}}{t_H} = \frac{AC \cdot AK \cdot \sin\alpha}{(1/2) \cdot AC \cdot AB \cdot \sin\alpha} = \frac{2 \cdot AK}{AB} = \frac{2b}{a+b}$$

(az utolsó lépésben azt használtuk fel, hogy a szögfelező a mellette fekvő oldalak arányában osztja a szemközti oldalt).

Így az f_c szögfelező megfelel e-nek, ha $\dfrac{2b}{a+b} > \dfrac{3}{4}$, azaz $b > 3a/5$.

Ha $b \leq 3a/5$, akkor a háromszög-egyenlőtlenség miatt $c > 2a/5$, tehát $c > 2b/3 > 3b/5$. Ekkor a fentieket az A-ból induló f_a szögfelezőre alkalmazva kapjuk, hogy $e = f_a$ teljesíti a feladat követelményét.



Megjegyzés: A gondolatmenet alapján a $3/4$ helyett erősebb becslést is adhatunk: a $3/4$ helyett a v számra is igaz az állítás, ha $2b/(a+b) > v$ és $2c/(b+c) > v$ közül legalább az egyik teljesül, azaz ha (*) $b > av/(2-v)$ vagy (**) $c > bv/(2-v)$. Ha (*) nem igaz, azaz $b \leq av/(2-v)$, akkor a háromszög-egyenlőtlenség miatt $c > a(2-2v)/(2-v)$, tehát

$$\frac{c}{b} > \frac{a(2-2v)/(2-v)}{av/(2-v)} = \frac{2-2v}{v}.$$

Így (**)-hoz elég, ha $\dfrac{2-2v}{v} \geq \dfrac{v}{2-v}$, azaz $v^2 - 6v + 4 \geq 0$, ami ($v \leq 1$ miatt) $v \leq 3 - \sqrt{5}$-re teljesül. Így a lehető legjobb érték $v = 3 - \sqrt{5} = 0,7639\ldots$ Az is világos a fentiekből, hogy szögfelezőre tükrözéssel ez a becslés nem javítható.

2. feladat.

Jelölje p_i az i-edik prímszámot, és legyen $Q_k = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$. (Tehát pl. $Q_4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$.) Igazoljuk, hogy az $1, 2, \ldots, Q_k$ számok között pontosan $Q_k/2$ darab olyan van, amely a $p_1, \ldots, p_k$ közül páratlan sokkal osztható.

Első megoldás: Csak annyit fogunk kihasználni, hogy $p_1 = 2$ és a többi p_i (egymástól különböző, pozitív) páratlan szám. Legyen $T_k = p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ (illetve $T_1 = 1$), ami a feltételünk szerint páratlan, és ekkor $Q_k = 2T_k$.

A feladat igazolásához az $1, 2, \ldots, Q_k$ számokat olyan párokba fogjuk csoportosítani, amelyek egyik eleme páros sok, másik eleme pedig páratlan sok p_i-vel osztható. Legyenek a párok c és $c + T_k$, ahol $1 \le c \le T_k$. A c és $c + T_k$ közül az egyik osztható 2-vel, a másik nem, viszont a $p_2, \ldots, p_k$ számok közül pontosan ugyanazokkal oszthatók (hiszen a különbségük $T_k = p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$). Ez azt jelenti, hogy c és $c + T_k$ a feladat szempontjából csak a $p_1 = 2$-vel való oszthatóságban tér el, és így az egyikük páros sok, a másikuk páratlan sok p_i-vel osztható.

Második megoldás: Ebben a megoldásban azt használjuk ki, hogy $p_1 = 2$ és a p_i-k páronként relatív prímek ($i = 1, 2, \ldots$). Nevezzünk egy számot „k-szép”-nek, ha a $p_1, \ldots, p_k$ közül páros sok osztója van. Teljes indukcióval bizonyítunk k szerint. A $k = 1$ eset nyilvánvaló. Tegyük most fel, hogy az állítás igaz $k-1$-re, vagyis az $1, 2, \ldots, Q_{k-1}$ számoknak pontosan a fele $k-1$-szép.

Mivel az $1, 2, \ldots, Q_k = p_k Q_{k-1}$ számok összesen p_k darab teljes maradékrendszert alkotnak mod Q_{k-1}, tehát ezeknek is pontosan a fele $k-1$-szép. Osszuk ezt a Q_k darab számot két csoportba: az első csoportban a p_k-val osztható számok legyenek, a másodikban a többiek. A második csoportban egy szám akkor és csak akkor $k-1$-szép, ha k-szép, az elsőben viszont egy szám akkor és csak akkor akkor k-szép, ha nem $k-1$-szép. Belátjuk, hogy az első csoportban lévő számoknak pontosan a fele $k-1$-szép. Ezzel készen leszünk, mert akkor a második csoportban lévő számoknak is a fele $k-1$-szép, és így mindkét csoportban a számok fele lesz k-szép.

Az első csoport számai $v = sp_k$, ahol $1 \le s \le Q_{k-1}$. Legyen $1 \le i \le k-1$. Mivel $(p_i, p_k) = 1$, ezért $p_i \mid v \iff p_i \mid s$. Ezért v akkor és csak akkor $k-1$-szép, ha az s szám $k-1$-szép. Az indukciós feltevés alapján az s-eknek a fele $k-1$-szép, ezért a v-knek is pontosan a fele $k-1$-szép.

Harmadik megoldás: A második megoldáshoz hasonlóan most is azt használjuk ki, hogy $p_1 = 2$ és a p_i-k páronként relatív prímek ($i = 1, 2, \ldots$).

Tekintsük az

$$S = Q_k - 2\sum_{i=1}^{k} \frac{Q_k}{p_i} + 2^2 \sum_{1 \le i < j \le k} \frac{Q_k}{p_i p_j} - 2^3 \sum_{1 \le i < j < r \le k} \frac{Q_k}{p_i p_j p_r} + \ldots$$

összeget, azaz az $1, 2, \ldots, Q_k$ egészek számából vonjuk le minden i-re a p_i-vel oszthatók számának a dupláját, majd adjuk hozzá minden $i < j$ párra a p_i-vel és p_j-vel is oszthatók számának négyszeresét stb.

Vegyünk egy $1 \le x \le Q_k$ számot, amely a $p_1, \dots, p_k$ közül pontosan m-mel osztható, és nézzük meg, hányszor számoltuk meg x-et S-ben. Az eredmény nyilván

$$1 - 2m + 2^2\binom{m}{2} - 2^3\binom{m}{3} + \ldots = (1-2)^m,$$

azaz 1, ha m páros, és -1, ha m páratlan. A feladat állításához így azt kell belátni, hogy $S = 0$. Ez pedig azért igaz, mert S átírható $S = Q_k \prod_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{2}{p_i}\right)$ alakba, és így $p_1 = 2$ miatt ez a szorzat 0.

3. feladat.

Adottak az n és k pozitív egészek, ahol $n \ge k+2$. Legyenek továbbá az n elemű H halmaznak $A_1, \dots, A_m$ olyan k elemű részhalmazai, hogy

(1) H minden egyelemű részhalmaza előáll néhány A_i metszeteként; de

(2) az A_i-k közül bármelyiket elhagyva (1) már nem teljesül.

(a) Mutassuk meg, hogy $m \le kn$.

(b) Lássuk be, hogy az A_i-k alkalmas megválasztásával $m \ge kn - k^2$ elérhető.

Megoldás: **(a)** Vegyünk egy tetszőleges $z \in H$ elemet, és tekintsük azokat az A_r-eket, amelyek metszeteként $\{z\}$ előáll. Az egyszerűbb jelölés kedvéért tegyük fel, hogy ezek $A_1, \dots, A_s$, és legyen $A_1 = \{z, z_2, \dots, z_k\}$. Mivel $\bigcap_{r=1}^{s} A_r = \{z\}$, ezért minden $2 \le j \le k$ esetén z_j-hez van olyan $2 \le t \le s$, amelyre $z_j \notin A_t$. Ekkor $\{z\}$ előáll ezen A_t-k és A_1 metszeteként is, azaz z-hez legfeljebb k darab részhalmazt elég felhasználnunk. Mivel ez az n elemű H tetszőleges elemére igaz, ezért (2) alapján az A_i részhalmazok száma valóban legfeljebb nk.

(b) Legyen $H = \{1, 2, \dots, n\}$, és a megfelelő k elemű részhalmazokat képezzük a következőképpen: mindegyik tartalmazzon az $1, 2, \dots, k$ elemek közül $k-1$-et, és a többi elem közül 1-et, és ezt valósítsuk meg minden lehetséges módon; jelölje $1 \le c \le k < d \le n$-re $B_{c,d}$ azt a k elemű halmazt, amelynek elemei a c kivételével az $1, 2, \dots, k$ mindegyike, valamint a d. Megmutatjuk, hogy az így kapott $k(n-k)$ darab $B_{c,d}$ részhalmaz eleget tesz a feltételeknek.

Az $1, 2, \dots, k$, illetve a többi elem szerepe szimmetrikus, így (1) igazolásához elég előállítani az 1-et és az n-et. Nyilván

$$\{1\} = \left(\bigcap_{c=3}^{k} B_{c,n}\right) \bigcap B_{2,n-1} \qquad \text{és} \qquad \{n\} = \bigcap_{c=1}^{k} B_{c,n}.$$

Meg kell még mutatnunk, hogy egyik részhalmaz sem fölösleges. Valóban, ha $B_{c,d}$-t elhagyjuk, akkor $\{d\}$ már nem áll elő metszetként, hiszen a d-t tartalmazó maradék $k-1$ részhalmaz mindegyikének c is eleme lesz.