



**Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
2008-2009. tanévi harmadik, döntő fordulójának feladatai
matematikából, a II. kategória számára**

1. Határozzuk meg azon k_1, k_2, \dots, k_n és n pozitív egészeket, amelyekre

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = 5n - 4 \quad \text{és} \quad \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} = 1.$$

2. A szabályos ABC háromszög belső P pontjának az AB , BC és CA oldalakra eső merőleges vetülete legyen rendre C' , A' és B' . Jelölje az APC' , BPA' , CPB' és APB' , BPC' , CPA' háromszögekbe írt körök sugarát rendre r_1, r_2, r_3 és r_4, r_5, r_6 . Bizonyítsuk be, hogy

$$r_1 + r_2 + r_3 = r_4 + r_5 + r_6.$$

3. A $H = \{1; 2; 3; \dots; 9\}$ halmaz egy P *partíciójának* nevezzük azt, ha H -t diszjunkt részhalmazainak uniójaként írjuk fel. (A részhalmazok páronként közös elem nélküliek.) Jelölje $P(n)$ az n -t tartalmazó részhalmaz elemeinek számát ($n \in H$). Például a $P : \{1; 4; 5\} \cup \{2\} \cup \{3; 6; 7; 8; 9\} = H$ partíció esetén $P(6) = 5$.

Bizonyítsuk be, hogy H bármely P_1 és P_2 partíciójára található két különböző H -beli n és m elem, amelyekre $P_1(n) = P_1(m)$ és $P_2(n) = P_2(m)$.

Valamennyi feladat 7 pontot ér.



Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
2008-2009. tanévi harmadik, döntő fordulójának feladatmegoldásai
matematikából, a II. kategória számára

1. Határozzuk meg azon k_1, k_2, \dots, k_n és n pozitív egészeket, amelyekre

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = 5n - 4 \quad \text{és} \quad \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} = 1.$$

Megoldás: Írjuk fel a harmonikus és számtani közepek közötti egyenlőtlenséget a feladatban szereplő k_1, k_2, \dots, k_n számokra. Felhasználjuk, hogy összegük és reciprokaiknak összege is adott.

$$\frac{n}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}} = n \leq \frac{k_1 + k_2 + \dots + k_n}{n} = \frac{5n - 4}{n}.$$

Ebből $n^2 \leq 5n - 4$, amiből $1 \leq n \leq 4$ következik.

3 pont

Vizsgáljuk meg a szóba jöhető n értékeket. Az $n = 1$ és $n = 4$ esetben az iménti egyenlőtlenségben = van, azaz minden k_i egyenlő, a megoldások

$$n = k_1 = 1 \quad \text{és} \quad n = k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 4.$$

1 pont

Ha $n = 2$, akkor $k_1 + k_2 = 6$, viszont ennek pozitív egész megoldásai esetén a reciprokösszeg: $\frac{1}{1} + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ és $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, ezek egyike sem 1.

Az $n = 3$ esetben tegyük fel, hogy $k_1 \leq k_2 \leq k_3$. Mivel a reciprokok összege 1, ezért $1 < k_1$. $k_1 + k_2 + k_3 = 11$ miatt $k_1 < \frac{11}{3}$, azaz k_1 lehetséges értékei a 2 és 3. $k_1 = 3$ esetén a reciprokösszeg $k_1 \leq k_2 \leq k_3$ mellett csak úgy teljesülhet, ha $k_1 = k_2 = k_3 = 3$, viszont ekkor az összeg nem 11, nem kaptunk megoldást.

$$k_1 = 2 \text{ esetén } \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} = \frac{1}{2}, \text{ ebből } k_2 k_3 - 2k_2 - 2k_3 = 0, \text{ szorzattá alakítva}$$

$$(k_2 - 2)(k_3 - 2) = 4.$$

A 4 megfelelő felbontásai az $1 \cdot 4$ és $2 \cdot 2$, az első esetben $k_2 = 3$, $k_3 = 6$, a másodikban $k_2 = k_3 = 4$. A $k_1 + k_2 + k_3 = 11$ feltétel miatt csak a 2,3,6 számhármass megfelelő, illetve ezek bármilyen sorrendben.

3 pont

Az utóljára tárgyalt $n = 3$, $k_1 = 2$ esetben is célhoz érünk a $k_1 + k_2 + k_3 = 11$ feltételből adódó lehetséges további számpárok vizsgálatával. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ közül csak egyszer lesz a reciprokösszeg 1.

Összefoglaljuk a három fajta megoldást: az $n = k_1 = 1$, az $n = k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 4$ és az $n = 3$ ahol k_1, k_2, k_3 a 2,3,6 valamilyen sorrendben.

Összesen: 7 pont

2. A szabályos ABC háromszög belső P pontjának az AB , BC és CA oldalakra eső merőleges vetülete legyen rendre C' , A' és B' . Jelölje az APC' , BPA' , CPB' és APB' ,

BPC' , CPA' háromszögekbe írt körök sugarát rendre r_1 , r_2 , r_3 és r_4 , r_5 , r_6 . Bizonyítsuk be, hogy

$$r_1 + r_2 + r_3 = r_4 + r_5 + r_6.$$

Megoldás: Felhasználjuk, hogy ha egy derékszögű háromszög befogói a és b , átfogója c , beírt körének sugara r , akkor $2r = a + b - c$. Az APC' , BPA' és CPB' háromszögekbe írt körök sugarainak összege ezek szerint

$$(1) \quad (AC' + C'P - AP) + (BA' + A'P - BP) + (CB' + B'P - CP).$$

Az APB' , BPC' és CPA' háromszögekbe írt körök sugarainak összege pedig

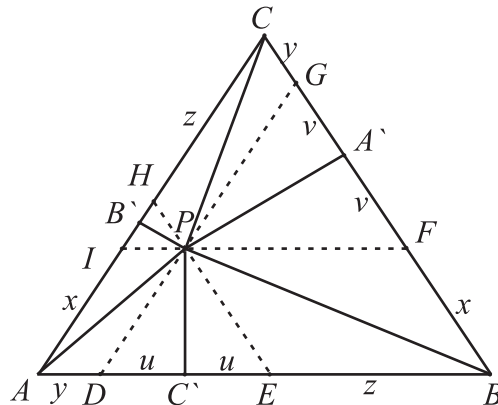
$$(2) \quad (AB' + B'P - AP) + (BC' + C'P - BP) + (CA' + A'P - CP).$$

Összevetve (1)-et és (2)-öt a bizonyítandó állítás

$$AC' + BA' + CB' = AB' + BC' + CA'. \quad 4 \text{ pont}$$

Húzzunk párhuzamosakat az ABC háromszög oldalaival P -n át. Ezek a háromszög oldalait a D, E, F, G, H, I pontokban metszik az ábra szerint. Ekkor $ABFI$ szimmetrikus trapéz, így $AI = BF = x$, hasonlóan $AD = CG = y$ és $BE = CH = z$. Keletkezett három szabályos háromszög DEP , FGP és HIP , amelyeknek szimmetria tengelye rendre PC' , PA' és PB' . Így $DC' = C'E = u$, $FA' = A'G = v$ és $HB' = B'I = w$. Készen is vagyunk, hiszen

$$AC' + BA' + CB' = x + y + z + u + v + w = AB' + BC' + CA'. \quad 3 \text{ pont}$$



Összesen: 7 pont

3. A $H = \{1; 2; 3; \dots; 9\}$ halmaz egy P partíciójának nevezzük azt, ha H -t diszjunkt részhalmazainak uniójaként írjuk fel. (A részhalmazok páronként közös elem nélküliek.) Jelölje $P(n)$ az n -t tartalmazó részhalmaz elemeinek számát ($n \in H$). Például a $P : \{1; 4; 5\} \cup \{2\} \cup \{3; 6; 7; 8; 9\} = H$ partíció esetén $P(6) = 5$.

Bizonyítsuk be, hogy H bármely P_1 és P_2 partíciójára található két különböző H -beli n és m elem, amelyekre $P_1(n) = P_1(m)$ és $P_2(n) = P_2(m)$.

Megoldás: Egy partícióban a részhalmazok között szerepelhet az üres halmaz is, de ennek a feladat szempontjából nincs jelentősége, ezért a továbbiakban a partíciókban levő nem üres részhalmazokat figyeljük. Nézzük meg egy tetszőlegesen választott P_1 és P_2 partíció esetén, mit is mond a feladat:

$$P_1 : \{1; 4; 5\} \cup \{2\} \cup \{3; 6; 7; 8; 9\} = H \quad \text{és} \quad P_2 : \{1\} \cup \{2; 6; 9\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5; 7\} \cup \{8\} = H.$$

Felírjuk minden $j \in H$ elem esetén a hozzá tartozó $(P_1(j); P_2(j))$ számpárt:

$$(1) \quad \begin{array}{cccccccccc} j : & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ (P_1(j); P_2(j)) : & (1; 1) & (1; 3) & (5; 1) & (3; 1) & (3; 3) & (5; 3) & (5; 3) & (5; 1) & (5; 3) \end{array}$$

Látjuk, hogy az $n = 6$ és $m = 7$ esetén $P_1(n) = P_1(m)$ és $P_2(n) = P_2(m)$.

Egy adott partícióban legfeljebb három különböző méretű részhalmaz lehet, mert már a négy legkisebb különböző méret esetén is $1 + 2 + 3 + 4 = 10 > 9$. 1 pont

Tetszőlegesen választott P_1 és P_2 partíció esetén (1) mintájára tekintsük a $(P_1(j); P_2(j))$ számpárokat. Mivel $P_1(j)$ csak három féle lehet, ezért a számpárokból szereplő első szám helyén legfeljebb három különböző szám szerepelhet. Fenti példánkban az 1, 3 és 5. Ugyanígy a számpárok második, $P_2(j)$ száma is legfeljebb három féle lehet, a fenti példánkban 1, 2 és 3.

Tegyük fel indirekt, hogy a bizonyítandó állítás nem igaz. Ekkor a $j \in H$ -hoz tartozó $(P_1(j); P_2(j))$ számpárok csak úgy lehetnek mind különbözőek, ha $P_1(j)$ és $P_2(j)$ is valóban felvesz három különböző értéket ($j = 1, 2, \dots, 9$), és ezek minden variációja pont egyszer fordul elő. 3 pont

Nézzük meg, mely k esetén lehet, hogy $P_1(j) = k$ éppen három különböző j -nél szerepel. Ha a k elemű halmazok száma l a P_1 partícióban, akkor a k szám éppen $k \cdot l$ -szer szerepel. $k \cdot l = 3$ csak úgy lehet, ha $k = 1$ és három darab egy elemű halmaz van a P_1 partícióban, vagy $k = 3$ és pont egy darab háromelemű halmaz van.

Az indirekt feltevésből az következett, hogy a $P_1(j) = k$ számokat tekintve k értéke háromféle és minden érték éppen három j -nél szerepel. Ez utóbbi viszont csak két k -ra teljesülhet, azaz ellentmondásra jutottunk. 3 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: A feladat állítása $|H| = 8$ és $|H| = 10$ esetén nem igaz. Megadunk mindkét esetben két olyan partíciót, ahol különböző j számokhoz különböző $(P_1(j); P_2(j))$ számpár tartozik.

$$|H| = 8 :$$

$$P_1 = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4; 5\} \cup \{6; 7; 8\} \quad \text{és} \quad P_2 = \{1\} \cup \{4\} \cup \{6\} \cup \{2; 7\} \cup \{3; 5; 8\},$$

illetve $|H| = 10$ -re:

$$P_1 = \{1\} \cup \{2; 3\} \cup \{4; 5; 6\} \cup \{7; 8; 9; 10\} \quad \text{és} \quad P_2 = \{7\} \cup \{4; 8\} \cup \{2; 5; 9\} \cup \{1; 3; 6; 10\}.$$