**Az 1996/97. évi Országos Középiskolai Matematikai Tanulmányi Verseny feladatai**

**I. kategória: Szakközépiskolák**
**Első (iskolai) forduló**

**1.** Oldja meg a valós számok halmazán az

$$x + \sqrt[8]{x^5} - 12\sqrt[4]{x} = 0$$

egyenletet!

**2.** Tekintsük azokat a háromszögeket, amelyekben $\gamma = 60°$, $b + c = 5a$, és az oldalak mérőszámai természetes számok. Mekkorák lehetnek ezen háromszögek oldalai? Határozza meg a feltételeket kielégítő háromszögek közül a legkisebb kerületű háromszöget!

**3.** Igazolja, hogy ha $a$, $b$, $c$, $x$, $y$, $z$ 0-tól különböző valós számok és

$$a^2 + b^2 + c^2 = ax + by + cz \quad \text{és} \quad ax + by + cz = x^2 + y^2 + z^2,$$

akkor az

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$$

állandó érték!

**4.** Egy gúla alaplapja az $ABC$ háromszög, (negyedik) csúcsa $D$. Az $AD$ él harmadoló pontjai: $H_1$ és $H_2$ ($H_1$ van $A$-hoz közelebb), a $CD$ él harmadoló pontjai: $T_1$ és $T_2$ ($T_1$ van $C$-hez közelebb). Síkokat fektetünk $B$. $H_1$, $T_1$, illetve $B$, $H_2$, $T_2$ pontokon át. Ezek a síkok a gúlát három részre vágják szét. Bizonyítsa be, hogy a középső rész térfogata a két szélső rész térfogatainak számtani közepe!

**5.** Oldja meg a $[0; 2\pi]$ halmazon a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{\sqrt{3} + \cos x}{2\sin^3 x - \cos x \cdot \sin 2x} > \frac{3}{2\sin 4x}.$$

**6.** Az $ABC$ háromszögben $AC = 2AB$. Az $AC$ oldal felezőpontja $F$. Az $A$ csúcsból induló belső szögfelező a $BC$ oldalt a $D$ pontban metszi.

a) Igazolja, hogy az $ABDF$ négyszög érintőnégyszög.

b) Az $ABDF$ négyszögbe írt kör sugarát jelölje $r_1$, az $FDC$ háromszögbe írt kör sugarát $r_2$. Bizonyítsa be, hogy

$$1 \leq \frac{r_1}{r_2} < 2.$$

**Második forduló**

**1.** Felvettük az $ABCD$ négyzet síkjának ugyanazon az oldalán, a négyzet síkjára merőleges $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, $DD_1$ szakaszokat.

Számítsa ki a $DD_1$ szakasz hosszúságát, ha $AA_1 = 10$ cm, $BB_1 = 8$ cm, $CC_1 = 6$ cm, és a négyzet belsejében létezik olyan $O$ pont, amely az $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ pontoktól egyenlő távolságra van.

**2.** Oldja meg a természetes számok halmazán az

$$[\sqrt{n}] = \frac{n-3}{5}$$

egyenletet! (Bármely $a \in \mathbf{R}$ esetén $[a]$ jelenti azt a legnagyobb egész számot, amely nem nagyobb $a$-nál.)

**3.** Az $ABC$ háromszög $AC$ oldalának tetszőleges $P$ belső pontján át húzzunk párhuzamost az $A$ és a $C$ csúcsokból induló $AK$ és $CL$ súlyvonalakkal. A meghúzott egyenesek a $BC$ oldalat $E$, az $AB$ oldalt $F$ pontban metszik. Igazolja, hogy az $AK$ és a $CL$ súlyvonalak az $EF$ szakaszt három egyenlő részre osztják!

**4.** Bizonyítsa be, hogy tetszőleges háromszögben

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta}{ab} + \frac{\cos\beta\cos\gamma}{bc} + \frac{\cos\gamma\cos\alpha}{ca} = \frac{\sin^2\alpha}{a^2},$$

ahol $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ a háromszög szögei, és a velük szemközti oldalak rendre $a$, $b$, $c$.

**5.** Határozza meg azokat az $x$, $y$, $z$ valós számokat, amelyek kielégítik a

$$7x^2 + 3y^2 + 5z^2 + 7xy + 5yz = 0$$

egyenletet, és amelyekre az

$$(x + 2y - z - 1)^2 + (y - 2z + x - 1)^2 + (z + 2x - y - 1)^2$$

kifejezés a szélsőértékét veszi fel! Adja meg a szélsőérték nagyságát is!

**Harmadik (döntő) forduló**

**1.** Oldja meg a valós számok halmazán a

$$(3x^2 - 4x + 1)^3 + (x^2 + 4x - 5)^3 = 64(x^2 - 1)^3$$

egyenletet!

**2.** Az $ABC$ háromszög $BC$ oldalán adott a $P$ és a $Q$ pont úgy, hogy

$$BP : PQ : QC = 1 : 2 : 3.$$

Az $AC$ oldalt az $R$ pont $AR : RC = 1 : 2$ arányban osztja. A $BR$ szakasz az $AP$ szakaszt $T$, az $AQ$ szakasz $S$ pontban metszi. Az $ABC$ háromszög területe $t$. Igazolja, hogy a $PQST$ négyszög területe $\frac{5}{24}t$.

**3.** Bizonyítsa be, hogy bármely közvetlenül egymás után következő 1997 darab pozitív egész szám négyzetének összege nem lehet négyzetszám!

**II. kategória: Nem speciális tantervű gimnáziumok**
**Első (iskolai) forduló**

**1.** Az $a$ és $b$ pozitív számok összege 1. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{3} \le \frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} < \frac{1}{2}.$$

**2.** Egy sorozatban $a_1 = \frac{2}{3}$, $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, ha $n > 1$. Állítsuk elő $a_n$-et $n$ függvényeként.

**3.** Az $ABCD$ paralelogramma $ABC$ háromszögének $AC$ oldalához írt kör (azaz: külső érintő kör) a $BA$, ill. $BC$ egyeneseket az $X$, ill. az $Y$ pontban érinti. Bizonyítsuk be, hogy az $XY$ egyenes az $ACD$ háromszög beírt körét az $AD$, ill. a $CD$ oldalakon metszi.

**4.** Egy 7 egység oldalú négyzetben elhelyezünk 51 pontot. Bizonyítsuk be, hogy ezek között a pontok között van 3 olyan, amely lefedhető egy egységsugarú körrel.

**5.** Adjuk meg azokat a nemnegatív egészekből álló $(x; y)$ számpárokat, amelyek kielégitik a következő egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{x^2+y}-\sqrt{x-y}\leq\sqrt{x+y}.$$

**Második forduló**

**1.** 2000 különböző pozitív egész szám fele páros, fele pedig páratlan; összegük kisebb 3 000 000-nál. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük 3-mal osztható.

**2.** A hegyesszögű $ABC$ háromszög köré írt $A$ és $B$ pontjaiban húzott érintők az $S$ pontban metszik egymást. Az $AB$ és $CS$ egyenesek metszéspontját jelölje $M$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AC^2}{BC^2}.$$

**3.** Egy egyenes csonkakúp alapkörének a sugara $R$, fedőkörééé $r$, magassága pedig $m$; ezekre az $R-r<m$ feltétel teljesül. Beírtünk ebbe egy forgáshengert, amelynek alapköre a csonkakúp alapkörével koncentrikus, a fedőlapját határoló kör pedig a csonkakúp palástján van, és különbözik a csonkakúp fedőkörétől. Tudjuk, hogy a csonkakúpba írható ilyen hengerek közül ez a maximális térfogatú, sőt a maximális felszínű is.

Bizonyítsuk be, hogy ha a csonkakúp alkotóinak és a forgástengelyének a hajlásszöge $\alpha$, akkor $\operatorname{tg}\alpha=1/4$.

**4.** Legyen $s$ pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy $s$-nek van olyan egész számú többszöröse, amelynek tízes számrendszerbeli alakjában a jegyek összege $s$-sel egyenlő.

**Harmadik (döntő) forduló**

**1.** Egy konvex ötszög valamennyi átlója párhuzamos az ötszög egy-egy oldalával. Bizonyítsuk be, hogy bármelyik átló és a vele párhuzamos oldal hosszának az aránya ugyanaz, és határozzuk is meg ennek az aránynak a számértékét.

Mutassuk meg, hogy ha a síkon adottak a nem egy egyenesre eső $A$, $B$, $C$ pontok, akkor létezik olyan $ABCDE$ ötszög, amely a fenti tulajdonságú.

**2.** Legyen $n$ pozitív egész. Milyen $n$-ekre teljesül, hogy

$$n=d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2,$$

ahol $d_1$, $d_2$, $d_3$, $d_4$ az $n$ szám négy legkisebb pozitív egész osztója?

**3.** Hány olyan számhármas létezik, amelyek egy pozitív egész hányadosú mértani sorozat egymást követő elemei, és amelynek minden eleme pozitív egész osztója $N=90\,000$-nek?

Hány ilyen számhármas létezik $N=30^{10}$ esetén?

**III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumok**

**Első forduló**

**1.** Egy bizottság pályázatokat rangsorol úgy, hogy a bizottság minden tagja külön-külön készít egy teljes rangsort valamennyi pályázatról. Tudjuk, hogy a bizottsági tagok többségének a rangsorában az $A$ pályázat előrébb szerepel, mint a $B$ pályázat, és azt is tudjuk, hogy a tagok többségének a rangsorában a $B$ pályázat előrébb szerepel, mint a $C$ pályázat. Következik-e ebből, hogy a tagok többségének a rangsorában az $A$ pályázat előrébb szerepel, mint a $C$ pályázat?

**2.** Egy hegyesszögű háromszög oldalai legyenek $a$, $b$, $c$, a megfelelő magasságvonalak $m_a$, $m_b$, $m_c$, és a magasságpontnak a csúcsoktól való távolságai rendre $d_a$, $d_b$, $d_c$. Bizonyítsuk be, hogy

$$m_a d_a + m_b d_b + m_c d_c = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

**3.** Legyen az $ABC$ háromszög köré írt sugara $r$, a súlypontot a magasságponttal összekötő szakasz felezőpontja pedig $F$. Bizonyítsuk be, hogy

$$AF^2 + BF^2 + CF^2 = 3r^2.$$

**4.** Egy dobozban 4 fehér és 4 piros golyó van. Visszetevés nélkül kihúzzuk az összes golyót. Minden húzás előtt tippelhetünk a kihúzandó golyó színére. Átlagosan hány találat érhető el, ha mindig arra a színre tippelünk, amelyiknek nagyobb a valószínűsége?

**5.** Adjuk meg az összes olyan köbszámot, amely előáll nyolc szomszédos egész szám köbének az összegeként. (Köbszámon egy egész szám köbét értjük.)

**Második (döntő) forduló**

**1.** Tekintsünk 1997 különböző pozitív egészt, amelyek közül bármely tíznek ugyanaz a legkisebb közös többszöröse. Maximálisan hány szám lehet közöttük, amelyek páronként relatív prímek (azaz közülük semelyik kettőnek sincs egynél nagyobb közös osztója)?

**2.** Legyenek $AB$ és $CD$ egy kör húrjai, amelyeknek nincs közös pontjuk, továbbá $K$ a $CD$ húr egy belső pontja. Szerkesszük meg a kör kerületén a $P$ pontot úgy, hogy a $CD$ húrnak az $ABP$ háromszögbe eső szakaszát a $K$ pont felezze.

**3.** Adott a síkon 111 egységvektor, amelyek összege a zérusvektor. Bizonyítsuk be, hogy közülük kiválasztható 55 olyan, amelyek összegének a hossza legfeljebb 1.