M/7

Varga Tamás Matematika Verseny
7. osztály **II.** kategória
országos döntő

1. feladat
Bizonyítsuk be, hogy öt darab pozitív egész szám negyedik hatványai közül kiválasztható két olyan, amelyek különbsége osztható 10-zel!

Megoldás: A négyzetszámok utolsó jegyei 0, 1, 4, 6 és 9lehetnek.
Ezek négyzetei, pedig 0, 1, 5 és 6 végűek.
Tehát 5 pozitív egész negyedik hatványa között van két azonos végű, ezek különbsége osztható 10-zel. **8 pont**

2. feladat
Egy konvex sokszög átlói és oldalai számának szorzata 160. Mekkora a sokszög belső szögeinek összege?

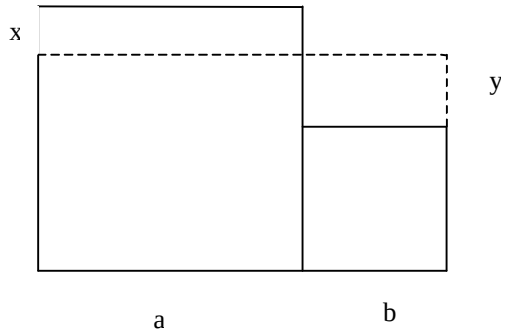
Megoldás: $\frac{n(n-3)}{2} \cdot n = 160$, azaz

$n^2(n-3) = 320 = 8 \cdot 8 \cdot 5$, mivel $n \geq 3$ és egész,

így n=8 és a szögösszeg $(n-2)\pi = 1080^o$. **10 pont**

3. feladat
Egy egyenes út mentén két különböző nagyságú, négyzet alakú telek volt egymás mellett. Telekrendezés során a két telket egy téglalap alakú telekké alakították úgy, hogy változatlan maradt a területe is, és az út menti oldal is. Mutassuk meg, hogy az új telek rövidebb oldala nagyobb a hosszabb oldal felénél!

Megoldás:



Az ábra jelöléseivel:
Mivel $a \cdot x = b \cdot y$ és legyen
$a > b$,
ezért $x > y$.
De, $a - x = b + y$, azaz $a - b = x + y$.

Ám, $\frac{a+b}{2} \langle b + y$ akkor és csak akkor, ha $a - b < 2y$.
Ha tehát $x + y < 2y$, ami $x < y$ miatt teljesül.

12 pont

4. feladat

Három sporthorgász csapat egy versenyen 113 halat fogott. Az első csapat tagjai átlagosan 13, a második csapat tagjai átlagosan 5, a harmadik csapat tagjai átlagosan 4 halat fogtak. Hányan voltak az egyes csapatokban, ha összesen 16 horgász vett részt a versenyen?

Megoldás: A feltételekből $x + y + z = 16$,

$13x + 5y + 4z = 113$.

Az első 5-szörösét kivonva a másodikból

$$8x = 33 + z = 32 + (1 + z).$$

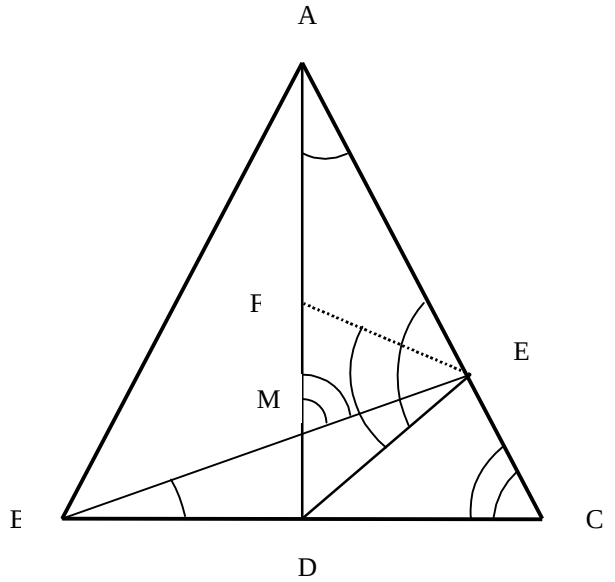
a $z + 1$ tehát 8-nak a többszöröse kell, legyen. Csak a $z = 7$ a jó, mert $1 \leq z \leq 14$.

Ebből $x = 5$, $y = 4$, $z = 7$, ami megfelelő is. **14 pont**

5. feladat

Az ABC háromszögben AB = AC, a BC oldal felező pontja D, a B csúcsból induló magasság az AC oldalt E-ben metszi. A DE szakaszra E-ben merőlegest emelünk. Igazoljuk, hogy ez felezi az A csúcs és az M magasságpont összekötő szakaszát!

Megoldás:



Az $AD \cap BE = M$ magasságpont.
Mivel a BEC derékszögű Δ – ben DE az átfogóhoz tartozó súlyvonal, ezért fele a BC átfogónak:
DE = BD = DC.
EBD< = DEB< .
Mivel BCE< = 90° - EBD< , ezért
DAC< = EBD< , mert ugyanannak pótszögei.
Ugyanígy:
FEM< = BCE< = BMD< = AME< .
Az AFE Δ és FEM Δ egyenlő szárúak, tehát AF = FE = FM, vagyis F felezi az AM szakaszt.

16 pont