M/8

Varga Tamás Matematika Verseny 8. osztályos feladatok megoldásai megyei forduló 2002.

II. kategória

1. feladat

Egy vonat egy egyenes alagúton állandó sebességgel halad át. A vonat elején haladó mozdonynak az alagútba érkezésétől számítva 20 másodperc telik el addig, amíg a szerelvény utolsó kocsija is elhagyja az alagutat. Az alagút mennyezetén levő lámpák akkor kezdenek el világítani, amikor a mozdony közvetlenül alájuk ér, és akkor alszanak ki, amikor az utolsó kocsi is elhaladt alattuk. Milyen hosszú a vonat, ha az alagút 300 méter hosszú, és mindegyik mennyezeti lámpa pontosan 10 másodpercig ég?

Megoldás

A vonat hossza legyen x méter. A feltételek szerint 300 + x métert 20 s alatt tesz meg,

Így sebessége: $\frac{300 + x}{20}$ m/s . **2 pont**

Másrészt az x méternyi utat 10 s alatt teszi meg, vagyis **2 pont**

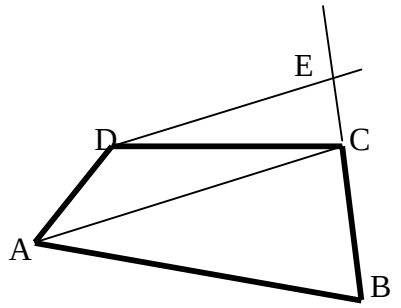
$$\frac{300 + x}{20} = \frac{x}{10}$$ **2 pont**

Amiből x = 300 méter **1 pont**

Ez - könnyen ellenőrizhetően – valóban megoldás **1 pont**

Összesen: 8 pont

2. feladat



Az ABCD konvex négyszög D csúcsán át haladó, az AC átlóval párhuzamos egyenes messe az ábra szerint a BC oldal egyenesét az E pontban. Igazoljuk, hogy az ABCD négyszög területe Megegyezik az ABE háromszög területével!

Megoldás:

Az ACED négyszög trapéz, és így az ACD háromszög területe egyenlő az AEC háromszög területével.

Hiszen az AC oldaluk közös és az ehhez tartozó magasságok egyenlők. **5 pont**

Ennél fogva $T_{ABCD} = T_{ACD} + T_{ABC} = T_{ACE} + T_{ABC} = T_{ABE}$ **5 pont**

Összesen: 10 pont

3. feladat

Legyen $p = 1 + 2^{2001} + 3^{2001} + \ldots + n^{2001}$ és

$$q = 2001^1 + 2001^2 + 2001^3 + \ldots + 2001^n.$$

A $p + q$ összeg páros, vagy páratlan?

Megoldás

Ha az n páratlan és $n = 4k + 1$, akkor

p páratlan sok $\left(\frac{4k}{2} + 1\right)$ páratlan szám 2001-edik, és párosok ugyanennyiedik hatványának az összege, tehát páratlan. **2 pont**

q pedig úgyszintén, mivel páratlan sok páratlannak az összege. **2 pont**

Hasonlóan nyerjük, ha $n = 4k + 3$, úgy

p páros sok $\left(\frac{4k+2}{2} + 1 = 2k + 2\right)$ páratlan és valahány páros szám összege, míg q változatlanul páratlan. **2 pont**

Ha n páros és $n = 4k + 2$, akkor p páratlan sok $(2k + 1)$ páratlan szám összege, mivel $(2m - 1)^{2001} + (2m)^{2001}$ összeg páratlan, ugyanakkor q páros, hiszen páros sok páratlan összege. **2 pont**

Végül ha $n = 4k$, akkor mind a p, mind a q páros sok páratlan szám összege. **2 pont**

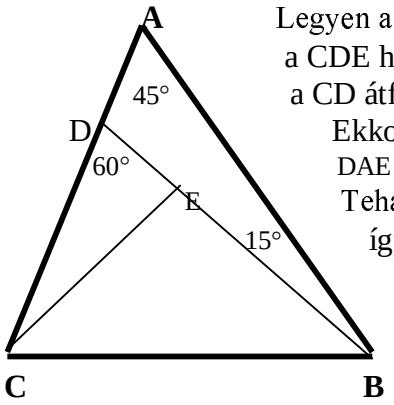
Összefoglalva: Ha $n = 4k + 1$ vagy $n = 4k + 2$, akkor $p + q$ páratlan, **1 pont**
a többi esetben pedig páros. **1 pont**

Összesen: 12 pont

4. feladat

Az ABC háromszögben a $CAB\angle = 45°$. A D az AC oldal ama pontja, amelyre $2 \bullet AD = CD$. Mekkora az ACB szög, ha a $DBA\angle = 15°$?

Megoldás



A külső szög tétele miatt $BDC\angle = 60°$. **2 pont**

Legyen a C-ből a BD-re merőleges talp pontja az E, akkor a CDE háromszögben a 30°-os szöggel szemközti ED befogó a CD átfogó fele, azaz a feltétel miatt $ED = AD$. **5 pont**

Ekkor viszont az ADE háromszögben $DAE\angle = 30°$, vagyis az ABE háromszögben $AE = EB$ **2 pont**

Tehát BCE háromszög egyenlő szárú és derékszögű, így $ACB\angle = 30° + 45° = 75°$ **3 pont**

Összesen: 14 pont

5. feladat
Egy 100 x 100-as táblán áll 150 bábu úgy, hogy minden mezőn legfeljebb egy áll.
Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható a táblának 50 sora és 50 oszlopa úgy, hogy ha leszedjük az ezeken álló bábukat, akkor nem marad bábu a táblán!

Megoldás
Kiválasztjuk azt az 50 sort amelyeken (soronként) a legtöbb bábu áll.
Ekkor a maradó 50 sorban 50-nél több bábu nem állhat, különben lenne olyan sor melyben két bábu található, s így a kiválasztott 50 sorban a legalább 100 bábuhoz legalább 51 bábu jönne, ami ellentmond a 150 bábu létének.
Ha viszont csak legfeljebb 50 bábu maradt a táblán, akkor ezek legfeljebb 50 oszlopban vannak, így ezek elvételével nem marad bábu a táblán.

Összesen: 16 pont

Bármelyik feladat eredményének indoklás nélküli közlése 1 pontot ér. Több megoldásból csak egy (lehetőleg a jobbik) kaphat pontot. Az útmutatóban közöltektől eltérő, de kifogástalan indoklású megoldások egyenértékűek a bemutatott megoldásokkal. *Az elérhető maximális pontszám 60 pont.*

A **II. kategóriába** tartozó versenyzők – akiknek a kötelező matematika óraszáma több, mint heti 4 óra – továbbküldési ponthatára **36 pont (60%).**

Kérjük a kollégákat, hogy feltűnően írják rá a versenydolgozatokra, a tanuló neve mellé a megfelelő kategóriát!

Köszönjük a munkájukat!

Székesfehérvár, 2002. január

A Versenybizottság