M/8

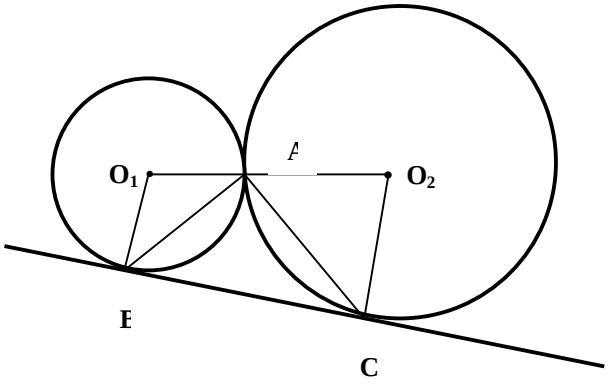
Varga Tamás Matematika Verseny 8. osztályos feladatok megoldásai
I. kategória
országos döntő 2002.

1. feladat
Ébresztő órám 4 percet késik óránként. Három és fél órával ezelőtt pontosra állítottam. Hány perc múlva mutat az órám 12 órát, ha most 12 óra van ?

Megoldás:
Az óra 3,5 óra alatt 14 percet késik, 12 órakor tehát 11 óra 46 percet mutat.
A nagymutatónak 14 percnyi utat kell járnia, hogy 12 órát mutasson az óra. De mert az 56 perces útját 60 perc alatt teszi meg, így a 14 perces utat 15 perc alatt járja meg.
Tehát 15 perc múlva mutat delet (éjfélt).

2. feladat
Rajzoljunk két különböző sugarú, egymást érintő kört! Húzzuk meg a két körnek azt a közös érintőjét, amelyik nem a két kör közös pontján halad át! Hány fokos szöget zár be egymással a két kör közös pontját az érintési pontokkal összekötő két szakasz ?

Megoldás:



A BO_1O_2C négyszög derékszögű trapéz, mert $O_1B \parallel O_2C$, mivel ugyanarra az egyenesre merőlegesek. Az A pont rajta van O_1O_2 –n.
Az AO_1B és AO_2C Δ –ekben
$O_1BA\sphericalangle = O_1AB\sphericalangle = \frac{\pi - AO_1B\sphericalangle}{2}$ és
$O_2CA\sphericalangle = O_2AC\sphericalangle = \frac{\pi - AO_2C\sphericalangle}{2}$.
Mivel $AO_1B\sphericalangle + AO_2C\sphericalangle = \pi$, ezért
$BAC\sphericalangle = \frac{\pi}{2}$. **10 pont**

3. feladat

Melyik az, az n természetes szám, amelyre az $n + 125$ is és az $n + 201$ is négyzetszám ?

Megoldás:

Az $n+125 = p^2$ és $n+201 = q^2$ –ből,

$q^2 - p^2 = (q + p)(q - p) = 76 = 4\cdot 19.$

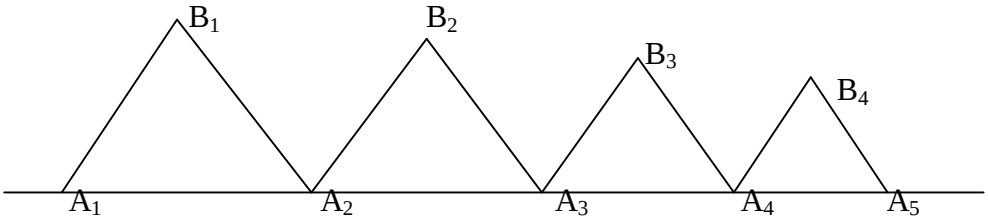
Ezért

q - p	q + p	q	p
1	76	$\frac{77}{2} \notin \mathbf{N}$	-
2	38	20	18
4	19	$\frac{23}{2} \notin \mathbf{N}$	-

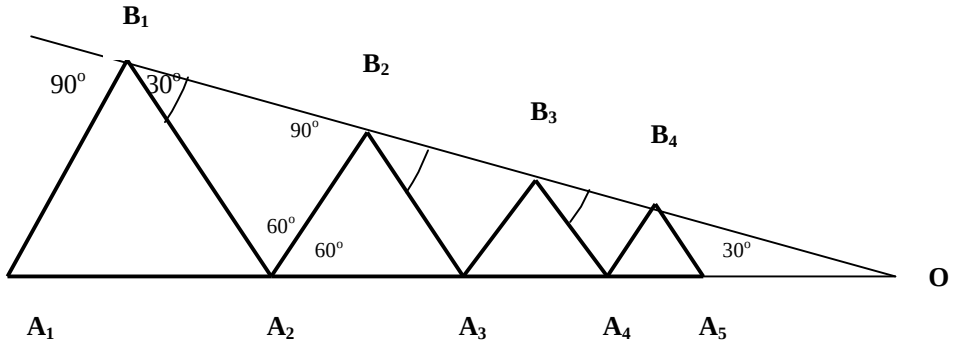
miatt, $p = 18$, $q = 20$, $p^2 = 324$, $q^2 = 400$ és $n = 400 – 201 = 199$. **12 pont**

4. feladat

Az alábbi ábrán lévő $A_1 A_2 B_1$; $A_2 A_3 B_2$; $A_3 A_4 B_3$ és $A_4 A_5 B_4$ szabályos háromszögek. Az A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 csúcsok egy egyenesen vannak, hasonlóan egy egyenesen vannak a B_1, B_2, B_3, B_4 pontok is. A két egyenes 30° - os szöget zár be egymással.
Mekkora az $A_4 B_4 B_3$ háromszög területe, ha az $A_1 A_2$ 2 egység hosszúságú szakasz ?



Megoldás:



$A_2‹ = A_3‹ = A_4‹ = 60^o$, így $B_1‹ = B_2‹ = B_3‹ = B_4‹ = 30^o$. (pl. $OB_1A_2\ \Delta$)
Tehát $A_1 B_1$; A_2B_2 ; A_3B_3 és $A_4B_4 \perp OB_i$.

Mivel a $B_iA_{i+1}B_{i+1}$ derékszögű háromszögben a 30° –os szöggel szemközti befogó fele az átfogónak, azaz

$$A_2B_2 = 1, \quad A_3B_3 = \frac{1}{2}, \quad A_4B_4 = \frac{1}{4}.$$

Pitagorasz szerint

$$(B_3B_4)^2 = (\tfrac{1}{2})^2 - (\tfrac{1}{4})^2 \text{ –ből } B_3B_4 = \frac{\sqrt{3}}{4}, \text{ vagyis a}$$

terület: $\dfrac{\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{32}$ t.e. **14 pont**

5. feladat

Egy távolugró bajnokságon a versenyzők ugrásainak hossza rendre
6 méter ; 6 + x méter ; 6 + 2x méter . . . . Összesen 77 métert ugrottak.
Hányan vettek részt a versenyen ?
Határozzuk meg az egyes versenyzők ugrásainak a hosszát !

Megoldás:

Ha n db résztvevő volt, úgy $2 \le n \le 12$, és

$$6 + (6 + x) + \ldots + (n-1)x = 77,$$

azaz

$$6n + x(1 + 2 + \ldots + n-1) = 77,$$

tehát

$$6n + x\frac{n(n-1)}{2} = 77.$$

(Megjegyzés: Itt korábban tévesen úgy gondoltuk, hogy n osztója 77–nek, de ez nem tételezhető fel. A feladat így fejezhető be:)

Tudva azt, hogy a távolugró világcsúcs 10 méternél kisebb, egyrészt: $x < 4$, másrészt $77 < 6n + 4\cdot\frac{n(n-1)}{2}$,

azaz $n \ge 6$.

Az összes megoldás felsorolásától a zsűri eltekintett. **16 pont**