M/8

Varga Tamás Matematika Verseny 8. osztályos feladatok megoldásai
II. kategória
országos döntő 2002.

1. feladat

A hatjegyű $\overline{abbabb}$ szám hat egymást követő prímszám szorzata.
Melyik ez a hatjegyű szám ?

Megoldás:

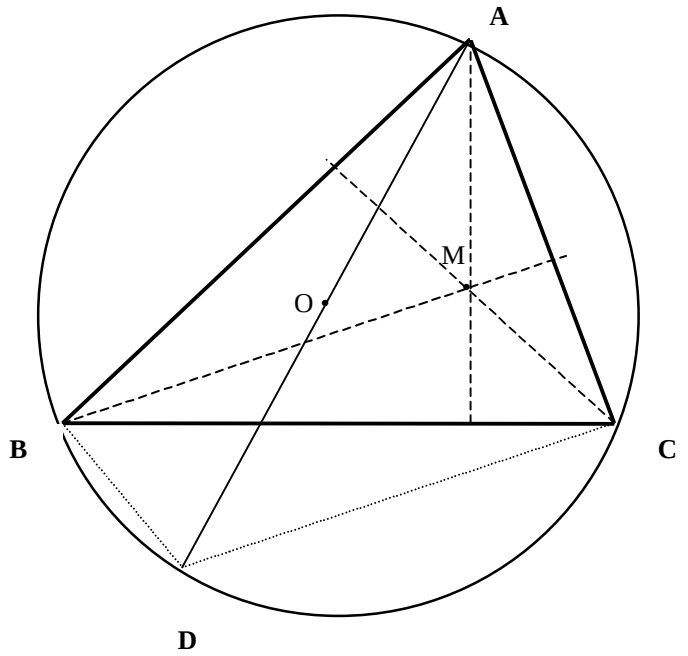
$\overline{abbabb} = 1001 \cdot \overline{abb} = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{abb}$,
mivel 7, 11, 13 három egymást követő prímszám, így

$\overline{abb} \in \{2 \cdot 3 \cdot 5 \ ; \ 3 \cdot 5 \cdot 17 \ ; \ 5 \cdot 17 \cdot 19\}$.
Ezek közül csak a $3 \cdot 5 \cdot 17 = 255$ a jó, mert $2 \cdot 3 \cdot 5 < 100$ és $5 \cdot 17 \cdot 19 > 999$. **8 pont**

2. feladat

Az ABC hegyesszögű háromszög magasságpontja az M pont. Az AD szakasz átmérője a háromszög köré írt körnek. Igazoljuk, hogy a BMCD négyszög paralelogramma!

Megoldás:



$MC \perp AB$, mert M magasságpont.
$BD \perp AB$, Thalesz –tétele miatt.

Tehát $MC \parallel BD$.

Ugyanígy:
$MB \perp AC$,
$DC \perp AC$,
vagyis $MB \parallel BD$.

Tehát a BMCD szemközti oldalai párhuzamosak.

10 pont

3. feladat

Három pozitív szám szorzata 1, összegük pedig egyenlő reciprokaik összegével. Igazoljuk, hogy a számok közül valamelyik 1-gyel egyenlő!

Megoldás:

$abc = 1$ és $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ egyenletekből

$a + b + c = bc + ac + ab$ adódik.

Ehhez az $abc = 1$ egyenletet hozzáadva, rendezés után

$0 = abc - ab - ac - bc + a + b + c - 1 = (a - 1)(b - 1)(c - 1)$,
tehát a, b, c legalább egyike 1. **12 pont**

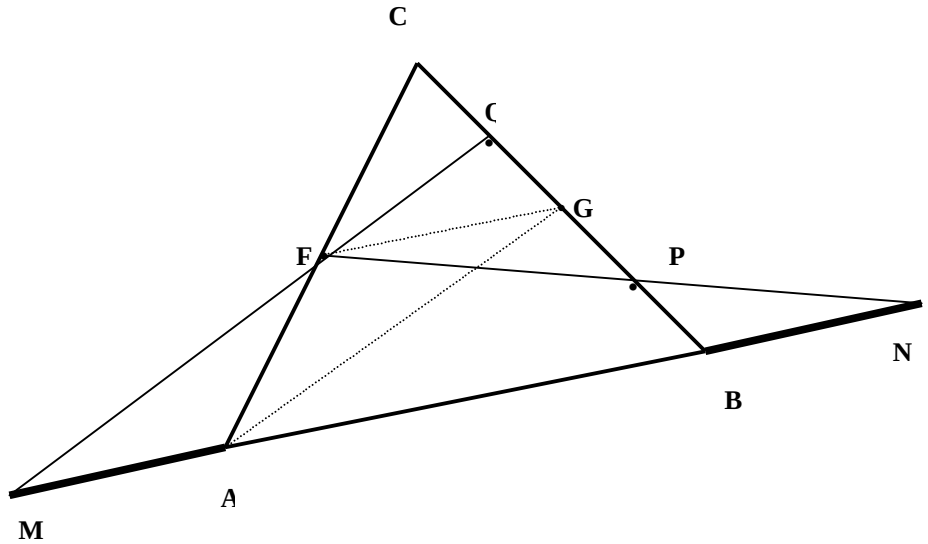
4. feladat

Az ABC háromszög AC oldalának felezőpontja F. A BC oldalon P és Q negyedelő pontok úgy, hogy

$BP = CQ = \frac{BC}{4}$. Messe az AB oldal egyenesét a QF egyenes M-ben,

az FP egyenes pedig N-ben. Mutassuk meg, hogy MA = BN !

Megoldás:



Legyen G a BC felezőpontja.

FG ∥ AM,
mert FG középvonal.

MF ∥ AG,
Mert a C közepű, 2 arányú hasonlóság FQ -t AG -be viszi.

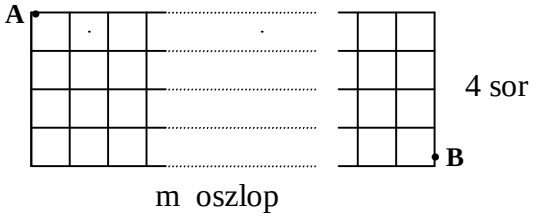
Így MAGF négyszög paralelogramma, és
<u>MA = FG</u> **(1)**

A BNGF négyszög is paralelogramma, mert a P pontra tükrös (B képe G és viszont, így FG képe BN és párhuzamosak, FN képe önmaga). Ezért: <u>FG = BN.</u> **(2)**

Tehát: MA = BN. **14 pont**

5. feladat

Két matematikus hangya rámászott egy 4 x m – es négyzethálóra.
Egyszerre indulnak el az A és B pontokból, és egyszerre lépnek. Egy lépés azt jelenti, hogy a vonalak mentén összesen 3 egységnyit haladnak.
Találkozhat-e a két hangya ?
Ha igen, hol ?



Megoldás:

A rácspontokat kiszínezzük felváltva fehérre és feketére. Egy hangya egy lépés során fehér rácspontról feketére lép és fordítva.
Ezért, ha kezdetben különböző színű rácspontokon álltak, akkor ez továbbra is így marad, tehát nem találkozhatnak.
Ha viszont azonos színű rácsponton álltak, akkor találkozhatnak, mégpedig bármely előre meghatározott rácsponton, ugyanis az elsőnek odaérkező hangya bevárhatja a másikat.(pl. bizonyos típusú lépésekkel.)
Annak feltétele, hogy kezdetben azonos színű rácsponton álljanak az, hogy m páros legyen.
Tehát a két hangya akkor és csak akkor találkozhat, ha m páros, a találkozás történhet bármely előre meghatározott rácsponton.