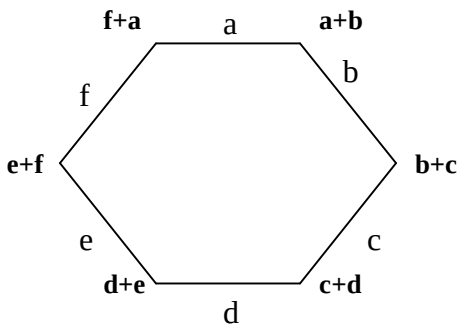
M/8

Varga Tamás Matematika Verseny
8. osztály
I. kategória, országos döntő 2003.
MEGOLDÁSOK

1. feladat

Kata egy szabályos hatszög oldalaira számokat ír, majd minden csúcsba beírja az oda befutó oldalakra írt számok összegét. Ezután törli az összes, oldalakra írt számot és az egyik csúcsba írt számot is, majd az így kapott ábrát megmutatja nekünk.
Meg tudjuk-e mondani, hogy Kata melyik számot törölte a kiszemelt csúcsból?

Megoldás:

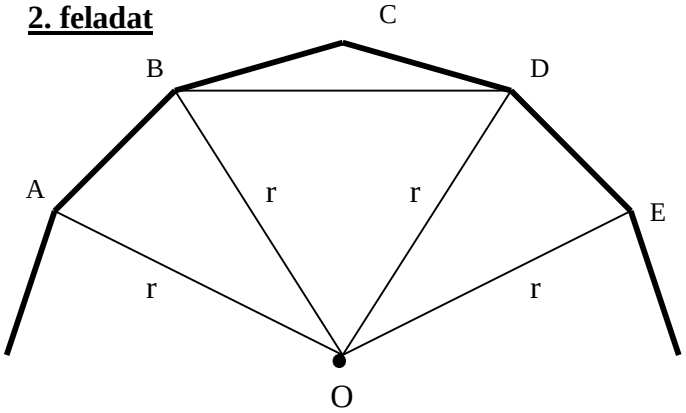


Igen, kitalálható.

A másodszomszéd csúcsokba írt összegek összege ugyanaz:
a + b + c + d + e + f.

Az összeg bármely két tagjának törlése a maradékból elárulja a törölt két szám összegét.

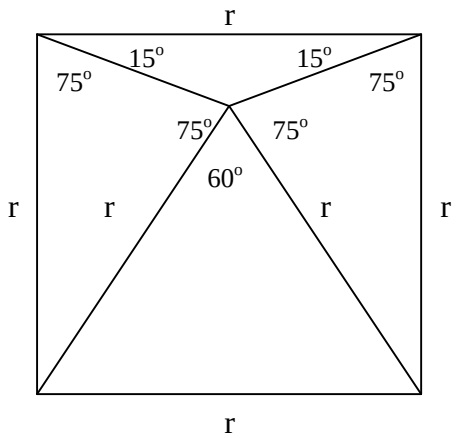
2. feladat



A szabályos tizenkétszög egymást követő
A, B, C, D és E csúcsai közül néhányat egymással és a tizenkétszög köré írható kör O középpontjával összekötöttünk az ábra szerint.
Állíts össze négyzetet az ABO, BDO, DEO és a BCD háromszögekből!

Megoldás:

Az AOB$\sphericalangle$ = DOE$\sphericalangle$ = 30°, BOD$\sphericalangle$ = 60°,
BCD$\sphericalangle$ = 150° $\left(\frac{12-2}{12}180^o = 150^o\right)$
tehát az egyenlő szárúság miatt
CBD$\sphericalangle$ = CDB$\sphericalangle$ = 15°, és
BAO$\sphericalangle$ = ABO$\sphericalangle$ = DEO$\sphericalangle$ = EDO$\sphericalangle$ = 75°,
BDO$\sphericalangle$ = DOB$\sphericalangle$ = DBO$\sphericalangle$ = 60°.
Ezért az ábra szerint összeállítható a négyzet.



3. feladat

Az **a, b, c** és **d** számokra teljesül: **a < b < c < d**.
Rakjuk növekvő sorrendbe az **x, y,** és **z** számokat, ha

$$x = (a + b)(c + d)$$

$$y = (a + c)(b + d)$$

$$z = (a + d)(b + c) \qquad !$$

Megoldás:

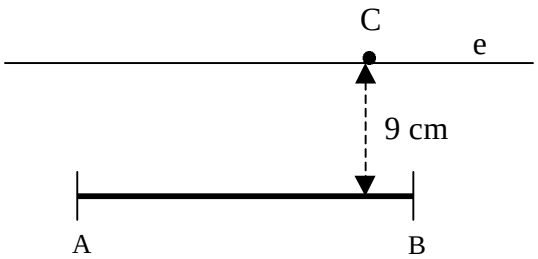
$y - x = ab + bc + ad + cd - (ac + bc + ad + bd) = a(b - c) + d(c - b) = (c - b)(d - a) > 0$,
mert $c - b > 0$ és $d - a > 0$, a feltétel miatt,
tehát $x < y$.
$z - y = ab + ac + bd + cd - (ab + bc + ad + cd) = c(a - b) + d(b - a) = (b - a)(d - c) > 0$,
mert $b > a$ és $d > c$.
Ennél fogva : $x < y < z$.

4. feladat

A 108 cm^2 területű háromszögek közül tekintsük azokat, amelyeknek van egy 24 cm hosszú oldaluk.
Legalább illetve legfeljebb mekkora lehet a feltételeket kielégítő háromszög kerülete?

Megoldás:

$108 = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot m$, azaz a 24 cm hosszú oldalhoz tartozó magasság 9 cm.

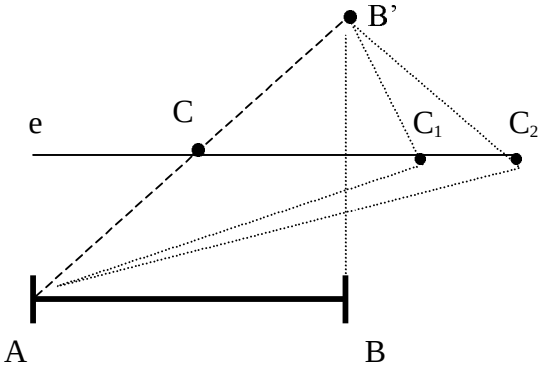


A C csúcs az AB-vel párhuzamos, tőle 9 cm-re haladó egyenesen van.
Az AC + CB + 24 akkor a legnagyobb illetve a legkisebb, amikor AC + CB a legnagyobb, illetve a legkisebb.

Az AC + CB összeg nem változik, ha a b helyett az e egyenesre vonatkozó tükörképére, B'-re számoljuk az AC + CB' összeget.

Ez az összeg minimális, ha A , C és B' egy egyenesen van, azaz a háromszög egyenlő szárú.
Ekkor Pitagorasz óta $AC = CB = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$,
tehát a kerület legalább 54 cm.

Maximum nincs, mivel
$AC_1 + C_1B = AC_1 + C_1B' < AC_2 + C_2B = AC_2 + C_2B'$
a tartalmazás miatt ($AC_1B'_\Delta \subset AC_2B'_\Delta$).

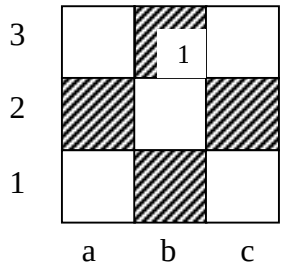


5. feladat

A 3 x 3 – as bűvös négyzet egy olyan 3 x 3 – as táblázat, amelybe beírták az első 9 pozitív egész számot úgy, hogy minden sorban, minden oszlopban és a két átlóban ugyanannyi a számok összege. Bizonyítsuk be, hogy sarokmezőbe sem az 5 sem az 1 nem kerülhetett, ha a táblázat helyesen van kitöltve!

Megoldás:

Mivel 1 + 2 + 3 + … + 8 + 9 = 45 és a soronkénti összegek egyenlők, ezért 15 kell legyen a sorok, oszlopok, átlók tartalmának összege.
Ha az 1 valamelyik sarokmezőben állna, úgy három olyan szám pár kellene, amelyek mindegyikében az összeg 14. Ilyen csak két párral lehetséges: 9 + 5 és 8 + 6.
(A középső mezőben sem lehet így az 1.)



A szimmetriák miatt nincs kitüntetett szerepe a „sötét” mezőknek, így az 1 helyét rögzíthetjük.
Az a és c oszlop szerepe is felcserélhető.
Így, ha az 5 az a3 sarokban lenne, úgy a 9 a c3 sarokba kerül és a középső (b2) mezőre a 6 vagy a 8, de akkor az átlóban már két szám összege legalább 15 lenne.
Belátható, hogy az 5 az a1 sarokban sem lehet.