Varga Tamás Országos Matematika Verseny
8. osztályos feladatok
megoldásai, II. kategória
megyei forduló 2005.

1. feladat: Egy osztály matematika dolgozatának eredményei a következők:
4 darab ötös, 9 darab hármas, 7 darab kettes és 2 darab egyes, míg a többiek dolgozata négyesre sikerült.
Hányan írtak négyes dolgozatot, ha a dolgozatjegyek átlaga 3,15-nál nagyobb, 3,2-nél kisebb, és tudjuk, hogy hármast írtak legtöbben?

Megoldás: A feltételek szerint

$$3{,}15 < \frac{4\cdot 5+9\cdot 3+7\cdot 2+2\cdot 1+n\cdot 4}{n+22} < 3{,}2 \;;$$ ……2 pont

ami akkor és csak akkor teljesül, ha

$7{,}41 < n < 9{,}25.$ ……..6 pont

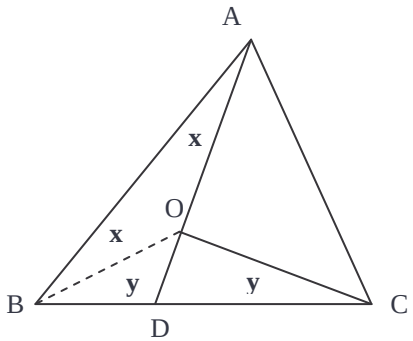
Ezért $n = 8$ vagy $n = 9$. ……1 pont
A legtöbb hármas miatt $n= 8$. ……1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: Ha az $n= 9$-et azon indokkal, hogy legtöbb számú dolgozatjegyből akár kétféle is lehet megengedi valaki, kapja meg a 10 pontot!

2. feladat: Az ABC háromszög BC oldalán a D pont harmadolja az oldalt, mégpedig $2\cdot BD = DC$ módon.
A C csúcsnak az AD-n levő merőleges vetülete az ABC háromszög köré írható kör középpontja. Mekkora az ABC< szög ?

Megoldás:



Ha O jelzi a merőleges vetületet, akkor az ACO Δ egyenlő szárú, derékszögű, mivel OA = OC a feltétel miatt. ……..3 pont

Az OA = OB = OC -ből
ABO< = BAO< = x és
OBC< = BCO< = y, ……3 pont

Tehát:

$2x + 2y + 90^o = 180^o$, amiből

ABC< = $x + y = 45^o$. ……..4 pont

Összesen: 10 pont

(Természetesen a kerületi-középponti szögek tétele is működhet!)

3. feladat: Az A-ból B-be elindult egy biciklis, és ugyanakkor indult el B-ből A-ba egy gyalogos is. Mind a ketten állandó nagyságú sebességgel haladtak. Amikor a biciklis B-be ért, a gyalogos még csak az útja $\frac{1}{5}$-ét tette meg.

Ha a biciklis 10 km/h-val kisebb, a gyalogos 3 km/h-val nagyobb sebességgel haladt volna, akkor a biciklis célba érésekor a gyalogos éppen az útja $\frac{3}{5}$-ét tette volna meg.

Mekkora a biciklis és mekkora a gyalogos sebessége ?

Megoldás: Az első feltétel alapján a biciklista b km/h sebessége 5-szöröse a gyalogos g km/h sebességének, azaz

$b = 5g$. ……3 pont

A második feltételből

$$\frac{g+3}{b-10} = \frac{g+3}{5g-10} = \frac{3}{5}$$, ……..4 pont

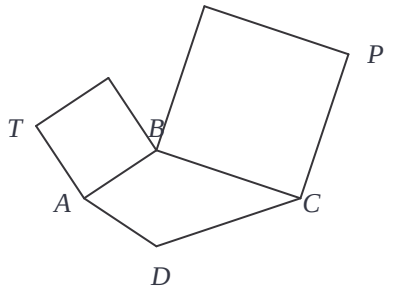
vagyis

g = 4,5 km/h és ezzel b = 22,5 km/h. ……..2 pont

Ezek (szövegben ellenőrizve) kielégítik a feltételeket. ……1 pont

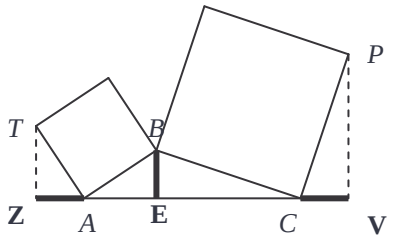
Összesen: 10 pont

4. feladat:



Az $ABCD$ konvex deltoid AB és BC oldalaira kifelé négyzeteket írtunk. E négyzetek P illetve T csúcsainak az AC egyenesen levő merőleges vetülete V illetve Z.
Bizonyítsuk be: $AZ + CV = BD$!

Megoldás:



A deltoid AC átlójára szimmetrikus, így elég azt belátnunk, hogy AZ = BE = CV, ahol E a B-beli magasság talppontja. ……2 pont

$ATZ\,\Delta$ egybevágó $ABE\,\Delta$-gel, mert átfogójuk egyenlő, mindkettő derékszögű és A< = B< , mivel mindkettő ugyanannak a szögnek a pótszöge.

Ezzel $AZ = BE$ ……4 pont

Kitüntetett szerep nélküli a BCE Δ és CPV Δ pár,

Tehát $CV = BE$. ……4 pont

Összesen: 10 pont

5. feladat: Egy 10 x 10-es táblázatba növekvő sorrendbe beírtuk a természetes számokat 1-től 100-ig úgy, hogy az első sorba balról jobbra haladva 1-től 10-ig, a másodikba ugyanígy 11-től 20-ig, és így tovább, az utolsóba 91-től 100-ig. A táblázatból kiválasztunk egy 4 x 4 –es résztáblát és a benne levő 16 számot összeadjuk.

a) Mutassuk meg, hogy az összeg osztható 8-cal !

b) Mennyi az esélye (valószínűsége) annak, hogy az összeg osztható 6-tal ?

Megoldás: Ha a 4 x 4-es táblázat bal felső mezőjében az n áll, úgy a 16 számot az

n	n+1	n+2	n+3
n+10	n+11	n+12	n+13
n+20	n+21	n+22	n+23
n+30	n+31	n+32	n+33

……1 pont

adják. Ezek összege 16n + 264.

a) $8 \mid 16n + 264$, hiszen $8 \mid 16n$ és $8 \mid 264$. ……2 pont

b) $6 \mid 16n + 264$, akkor és csak akkor, ha $3 \mid n$, mivel $6 \mid 264$, és 16n páros .....2 pont

A 10 x 10-es tábla bal-felső 7 x 7-es részéből kerülhet ki az n. (4 x 4-es bal-felsője) …….2 pont

Így soronként sorolva a „jó” n-eket: 3, 6, 12, 15, 21, 24, 27, 33, 36, 42, 45, 51, 54, 57, 63, 67. ……..2 pont

Az esély tehát „jó” esetek száma / összes választható = 16/49 ≈ 0,327 _____1 pont

Összesen: 10 pont

Bármelyik feladat eredményének indoklás nélküli közlése 1 pontot ér. Több megoldásból csak egy (lehetőleg a jobbik) kaphat pontot. Az útmutatóban közöltektől eltérő, de kifogástalan indoklású megoldások egyenértékűek a bemutatott megoldásokkal. *Az elérhető maximális pontszám 50 pont.*

A **II. kategóriába** tartozó versenyzők – akiknek a kötelező matematika óraszáma több mint heti 4 óra – dolgozatainak továbbküldési ponthatára **25 pont (50%).**

Felhívjuk a figyelmet, hogy a továbbküldés nem feltétlenül jelent továbbjutást.

Kérjük a kollégákat, hogy feltűnően írják rá a versenydolgozatokra, a tanuló neve mellé a megfelelő kategóriát!

Köszönjük a munkájukat!

Székesfehérvár, 2005. január

A Versenybizottság