Varga Tamás Országos Matematika Verseny
8. osztályos feladatok
megoldásai, II. kategória
megyei forduló 2006.

<u>1. feladat</u>: Bizonyítsuk be, hogy a $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + ... + 7^{19} + 7^{20}$ húsztagú összeg osztható 100-zal!

Megoldás: Mivel $7^1 + 7^2 + 7^3 + 7^4 = 7 + 49 + 343 + 2401 = 2800$, ……4 pont

ezért négyesével csoportosítva és rendre 7^4, 7^8, 7^{12} illetve 7^{16}

kiemelésével $7^4(7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) = 7^4 \cdot 2800$,

$7^8(7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) = 7^8 \cdot 2800$,

$7^{12}(7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) = 7^{12} \cdot 2800$,

$7^{16}(7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) = 7^{16} \cdot 2800$, ……..4 pont

tagokhoz jutunk, melyek mindegyike 100-nak többszöröse,
ezért az összeg is ilyen. ……...2 pont

összesen: 10 pont

Elvi hibás megoldásért nem jár pont. A számolási hibáért a megfelelő részre járó pontot nem adjuk meg. (Ez a továbbiakra is áll.) A feladat általánosításáért +2 pont jár.

<u>2. feladat</u>: Egy konvex sokszög belső szögeinek összege fokokban mérve S.
Hány fokkal nagyobb egy kétszer annyi oldalszámú, konvex sokszög belső szögeinek az összege?

Megoldás: Mivel $(n - 2)180^o = S$ ……2 pont

ezért a kétannyi oldalszámúra:

$(2n - 2)180^o = 2(n - 2)180^o + 2 \cdot 180^o = 2S + 360^o$. ……...6 pont

Tehát a keresett különbség

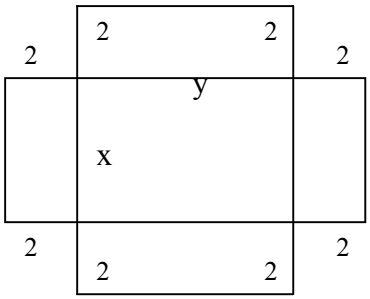
$S + 360^o$ (ennyivel nagyobb a szögösszeg). …….2 pont

összesen: 10 pont

Az általánosításért itt is jár +2 pont.

<u>3. feladat</u>: Egy téglatest alakú medence 2 méter mély. Érdekessége, hogy az oldalfalak együttes területe akkora, mint a medence alapjának a területe. Milyen széles és milyen hosszú a medence, ha éleinek a hossza méterekben mérve egész szám?

Megoldás:



<u>1. megoldás:</u> Ha x méter széles és y méter hosszú a medence, akkor a feltételek szerint

$xy = 4(x + y)$. ……2 pont

Ebből rendezés után mindkét oldalhoz 16-ot adva

$xy - 4x - 4y + 16 = 16$. ……..4 pont

A bal oldal szorzattá alakítható:

$(x - 4)(y - 4) = 16$.

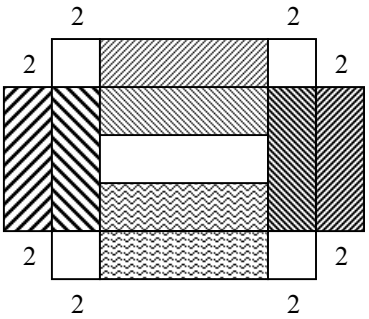
Feltehető, hogy $x \leq y$. A 16 két pozitív egész szorzataként $1 \cdot 16 = 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4$ formákban áll elő, tehát ……2 pont

x - 4	y - 4	x	y
1	16	5	20
2	8	6	12
4	4	8	8

háromféle méretegyüttes adódik. ..…<u>……...2 pont</u>

összesen 10 pont

<u>2. megoldás:</u>



Az oldallapokat befelé hajtva, az ábra 4 db üresen hagyott 2 x 2 méteres területével kell egyenlő legyen a „belső” üres téglalap területe. ……...6 pont

Így $16 = 1 \cdot 16 = 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4$ lehet a belső üres téglalap mérete ……2 pont vagyis a medence méretére három lehetőség adódik:

Szélesség (m)	Hosszúság (m)
1 + 2 + 2 = 5	16 + 2 + 2 = 20
2 + 2 + 2 = 6	8 + 2 + 2 = 12
4 + 2 + 2 = 8	4 + 2 + 2 = 8

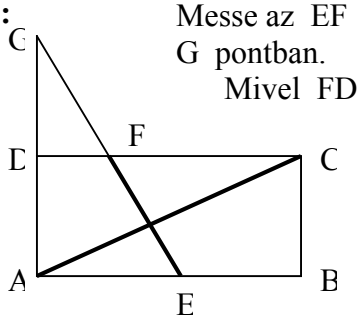
…….....<u>.....2 pont</u>

összesen 10 pont

Ha az $1 \cdot 16$ illetve az 5;20 adat elmarad, úgy 1 pontot levonunk.
Ha csak egy méretpárt ad meg, úgy legfeljebb 8 pont adható.

<u>4. feladat</u>: Az ABCD téglalap AB oldalának felezőpontja E, CD oldalának D-hez közelebbi felezőpontja F . Bizonyítsuk be, hogy ha AB = 2·BC , akkor az AC átlóra merőleges az EF !

Megoldás:



Messe az EF egyenes az AD egyenest G pontban.

Mivel FD = ½ AE és párhuzamosak, ezért

FD középvonal az AEG Δ-ben, ……...2 pont

vagyis AD = DG, tehát AG = AB. …….2 pont

Ennélfogva

az AEG Δ egybevágó ABC Δ-gel …….2 pont

mivel mindkettő derékszögű és 2-2 befogójuk egyenlő. …….……..2.pont

Ha az A pont körül $+90^{o}$-kal elforgatjuk az AEG Δ-et,

az ABC Δ eltoltját kapjuk, azaz AC merőleges EF-re. ……..<u>.....2 pont</u>

összesen 10 pont

A feladat állítása megfordítható. Ennek kimondásáért +2 pont jár.

<u>5. feladat</u>: Dani a számítógépével kiíratta az összes olyan, legfeljebb 2006 jegyű nem negatív egész számot, amelynek jegyei között legfeljebb két számjegy: a 0 és a 2 szerepel. Összesen hány 2-es számjegyet írt ki a gép?

Megoldás: Minden ilyen szám egy 2006 tagú, a 0 és/vagy a 2 számjegyeket tartalmazó sorozat, melynek első jegyei akárhány 0-ból állhatnak. ……..3 pont

Ilyen sorozat 2^{2006} darab van. ……..2 pont

Rendeljük minden darabhoz a komplementerét (0 helyébe 2, 2 helyébe 0 kerüljön)!

Az így kapott párban összesen 2006 darab 2-es van. ……...3 pont

Így a kiírt 2-esek darabszáma $2006 \cdot 2^{2005}$. ……<u>……..2 pont</u>

összesen: 10 pont

Egy feladat eredményének indoklás nélküli közlése, ha a javítókulcs másképpen nem rendelkezik, 1 pontot ér. Több megoldásból csak egy (lehetőleg a jobbik) kaphat pontot. Az útmutatóban közöltektől eltérő, de kifogástalan indoklású megoldások egyenértékűek a bemutatott megoldásokkal. *Az elérhető maximális pontszám 50 pont.*

A **II. kategóriába** tartozó versenyzők – akiknek a kötelező matematika óraszáma több mint heti 4 óra – dolgozatainak továbbküldési ponthatára **20 pont (40%).**

Felhívjuk a figyelmet, hogy a továbbküldés nem feltétlenül jelent továbbjutást.

Kérjük a kollégákat, hogy feltűnően írják rá a versenydolgozatokra, a tanuló neve mellé a megfelelő kategóriát!

Köszönjük a munkájukat!

Székesfehérvár, 2006. január

A Versenybizottság