Oktatási Minisztérium
Fejér Megyei Pedagógiai Szakmai és Szakszolgáltató Intézet

M/7

Varga Tamás matematikaverseny megyei forduló 2007.
7. osztály II. kategória
Megoldások

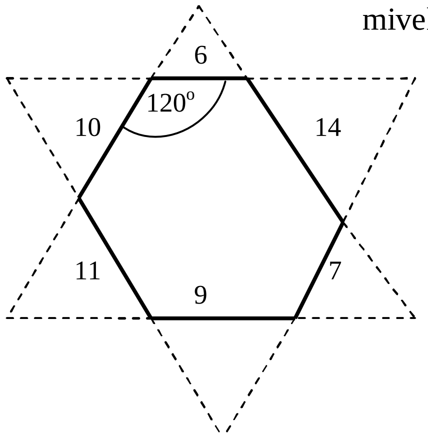
1. **feladat:** Aladár és Béla egyike minden hétfőn, kedden és szerdán hazudik, a hét más napjain igazat mond, másika viszont minden csütörtökön, pénteken és szombaton hazudik, a hét többi napján igazat mond. A hét melyik napján zajlott le közöttük a következő beszélgetés?
Aladár: Szombatonként hazudok;
Béla: Holnap hazudni fogok;
Aladár: Vasárnaponként hazudok.

Megoldás: Mivel vasárnap mindketten igazmondók,
így Aladár „hazudós” napján szólt vasárnapról. ....2 pont
De ugyanezen a hazudós napon szólt szombatról is, ...2 pont
tehát Aladár hétfőn, kedden vagy szerdán beszélgetett Bélával,
aki e a napokon igazmondó. ....2 pont
Ennélfogva Béla csak szerdán mondhatta a magáét, mert hétfőn és kedden igazat ígérne
másnapra, viszont szerdán vallja a másnapi hazugságot. ....2 pont

Ellenőrzés: más napokon nem beszélgethettek. ....2 pont
összesen: 10 pont

2. **feladat:** Egy hatszög mindegyik szöge 120^o-os, oldalai pozitív körüljárási irányban haladva 6, 10, 11, 9, 7, 14 cm hosszúak. A hatszög három oldalegyenese egy olyan szabályos háromszöget határol, amely tartalmazza az eredeti hatszöget is. Mekkora ennek a háromszögnek az oldala?

Megoldás: Csak a másodszomszéd oldalegyenesekkel kaphatunk kívánt tulajdonságú háromszöget,



mivel két szomszédos hatszögoldal 120^o-os szöget zár be,
így ha a harmadik oldal nem szomszédos ezekkel,
úgy nem szabályos a háromszög, ...2 pont
ha pedig 3 egymást követő oldalegyenest vettünk,
úgy nem tartalmazza hatszögünket a keletkezett
szabályos háromszög. ....2 pont
Két megoldásunk van: a hatszöget kiegészítő
háromszögek 2-2 szöge 60^o-os, tehát szabályosak ....2 pont
és ezért vagy 6 + 10 + 11 = 27 cm, ...2 pont
vagy 10 + 11 + 9 = 30 cm ....2 pont
a szabályos háromszög oldala. **összesen: 10 pont**

M/7

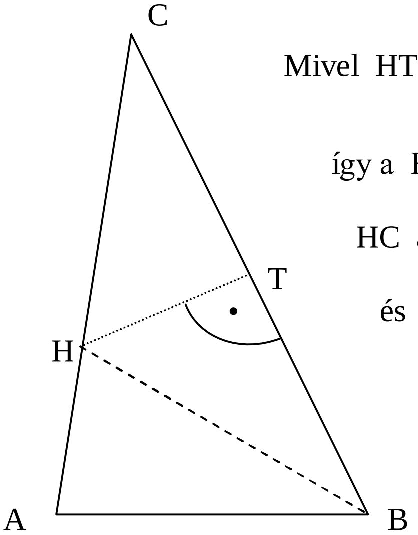
3. feladat: Ikerprímeknek nevezzük azokat a prímszámokat, amelyek között a különbség kettő. (Például: a 11 és 13, vagy a 17 és 19.) Igazoljuk, hogy egyetlen olyan ikerprímpár van, amelyben a nagyobb szám négyszereséből egyet kivonva prímszámot kapunk!

Megoldás: Legyen p_1 és p_2 ikerprímpár.
A p_1, $p_1 + 1$, $p_1 + 2 = p_2$ három egymást követő egész,
így van közöttük hárommal osztható. ....2 pont
Ha $p_1 > 3$, úgy ez csak $p_1 + 1$ lehet. ....2 pont
Mivel ekkor $p_1 + 1 = 3k$, tehát $4p_2 - 1 =$
$4(3k + 1) - 1 = 12k + 3 = 3(4k + 1)$ összetett szám, ...2 pont
ezért $p_1 = 3$ lehetséges csak. ....2 pont
Erre $p_2 = 5$ és $4 \cdot 5 - 1 = 19$ valóban prím, ...1 pont
tehát az egyetlen pár a 3; 5. ....1 pont

összesen: 10 pont

4. feladat: Egy háromszög alakú papírlap csúcsait rendre *A*, *B* és *C* betűk jelölik. Az *AC* oldal *A*-hoz közelebbi harmadoló pontja *H*. Ha a papírlapot a *BH* egyenes mentén összehajtjuk, akkor az *A* csúcs a *BC* oldalra esik, helyét a *BC* oldalon *T* jelöli. Tudjuk továbbá, hogy *HT* merőleges *BC*-re.
Mekkorák az *ABC* háromszög szögei?

Megoldás: A feltétel miatt $HAB_< = HTB_< = 90^o$, így háromszögünk derékszögű. ....3 pont



Mivel $HT = HA = \frac{1}{3} \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot HC$, ...3 pont

így a HTC derékszögű háromszög HT befogója fele a HC átfogónak, vagyis szögei: 30^o, 60^o és 90^o, ...2 pont

és C szög 30^o lévén, a keresett szögek: 30^o, 90^o és 60^o. ....2 pont

összesen: 10 pont

M/7

5. feladat: Adjuk meg a természetes számok halmazának három olyan részhalmazát, melyek közül bármelyik kettőnek a közös része végtelen elemszámú, ám a három részhalmaz közös része az üres halmaz**!**

Megoldás: Számos megoldás közül kettő:

Legyen a H alaphalmaz a 30-cal nem osztható pozitív egészek halmaza.
Ennek részhalmazai közül legyen

A = {a 2-vel oszthatók}; B = {a 3-mal oszthatók} és C = {az 5-tel oszthatók}. ....5 pont

Nyilván való, hogy $A \cap B \cap C$ = {a 30-cal oszthatók}
H komplementeréből valók, így H-ban az üres halmazt adják, ...2 pont
míg $A \cap B$ = {a H-beli 6-tal oszthatók}; $A \cap C$ = {a H-beli10-zel oszthatók}
és $B \cap C$ = {a H-beli 15 többszörösei} mindegyike végtelen elemszámú. ....3 pont

összesen: 10 pont

vagy

Az alaphalmaz az N

A = {3k | k Є N} U {3k + 1 | k Є N }
B = {3k | k Є N} U {3k + 2 | k Є N }
C = {3k + 1 | k Є N} U {3k + 2 | k Є N }. ....5 pont

$A \cap B \cap C$ = O, mivel bármelyik természetes egész legfeljebb
2 részhalmazhoz tartozhat, és ....2 pont
$A \cap B$ = {3k | k Є N}; $A \cap C$ = {3k+1 | k Є N}; $B \cap C$ = {3k+2 | k Є N}
végtelen elemszámú. ....3 pont

összesen: 10 pont

Bármelyik feladat eredményének indoklás nélküli közlése 1 pontot ér. Több megoldásból csak egy (lehetőleg a jobbik) kaphat pontot. Az útmutatóban közöltektől eltérő, de kifogástalan indoklású megoldások egyenértékűek a bemutatott megoldásokkal. *Az elérhető maximális pontszám 50 pont.*

A **II. kategóriába** tartozó versenyzők – akiknek a kötelező matematika óraszáma több mint heti 4 óra – dolgozatainak továbbküldési ponthatára **25 pont.**

A továbbküldés nem feltétlenül jelent továbbjutást. A továbbjutáshoz szükséges ponthatárt a versenybizottság állapítja meg, s erről a megyei szervezők 2007. március első hetében értesítést kapnak.

Kérjük a kollégákat, hogy feltűnően írják rá a versenydolgozatokra, a tanuló neve mellé a megfelelő kategóriát!

Köszönjük a munkájukat!

Székesfehérvár, 2007. január

A Versenybizottság