Oktatási Minisztérium
Fejér Megyei Pedagógiai Szakmai és Szakszolgáltató Intézet

M/8

Varga Tamás matematikaverseny
8. osztály I. kategóriás feladatok megoldásai
megyei forduló 2007.

1. feladat: Hogyan oszthatunk szét öt ember között száz cipót úgy, hogy a második ember ugyanannyival kapjon többet az elsőnél, mint a harmadik a másodiknál, a negyedik a harmadiknál és az ötödik a negyediknél, és még azt is megkívánjuk, hogy a három nagyobb rész összesen hétszer annyit tegyen ki, mint a két kisebb összege.

megoldás: Ha az első x darab cipót kapott, úgy rendre

$$x + (x + d) + (x + 2d) + (x + 3d) + (x + 4d) = 100$$

cipó került kiosztásra ....2 pont

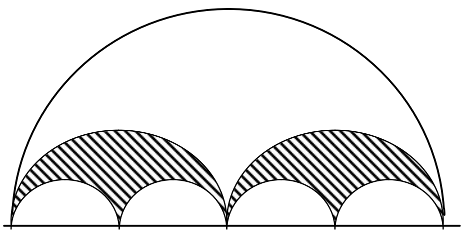
azaz $5x + 10d = 100$ vagyis
(*) $x + 2d = 20.$ ....2 pont

Mivel $7(2x + d) = 3x + 9d$, így
$11x = 2d$, ...2 pont

azaz (*) miatt $12x = 20$, $x = \frac{5}{3}$ és $d = \frac{55}{6}$. ....2 pont

Az osztásnál tehát $\frac{10}{6} + \frac{65}{6} + \frac{120}{6} = 20 + \frac{175}{6} + \frac{230}{6} = \frac{600}{6} = 100$ ....2 pont
módon kapták a 100 cipót. **összesen 10 pont**

2. feladat: Félkörökből készítettük az itt lévő ábrát. A négy legkisebb félkör egybevágó.



A vonalkázott rész hányad része a legnagyobb félkör területének?

megoldás: Az r sugarú félkör területe $\frac{\pi \cdot r^2}{2}$, ...2 pont

a fele ekkora $\frac{r}{2}$ sugarú félköré $\frac{1}{2}\pi(\frac{r}{2})^2$, ami negyede az előbbinek. ....2 pont

Így a $2 \cdot \frac{\pi}{8} r^2 - 4 \cdot \frac{\pi}{32} r^2 = \frac{\pi}{8} r^2$ ....4 pont

negyede a legnagyobb területnek. ....2 pont
összesen: 10 pont

M/8

3. feladat: Ikerprímeknek nevezzük azokat a prímszámokat, amelyek tagjai között a különbség 2. (Például a 11 és 13 vagy a 17 és 19.) Igazoljuk, hogy egyetlen olyan ikerprímpár van, amelyben a két prímszám összege nem osztható 12-vel!

megoldás: A $3 + 5 = 8$, a $7 + 5 = 12$, a $11 + 13 = 24$, a $17 + 19 = 36$,
a $29 + 31 = 60$ -ból csak az első pár a jó. ....1 pont
A többinél megfigyelhető, hogy a pár közé eső szám 3-nak többszöröse. Ez általánosan is így van. Ugyanis, ha p_1 és $p_2 = p_1 + 2$ ikerprímek és $p_1 > 3$, úgy
p_1, $p_1 + 1$ és $p_1 + 2 = p_2$ három egymást követő egész, ...2 pont
van tehát közöttük 3-mal osztható, és ez páros is. ....1 pont
p_1 és p_2 közül tehát az egyik 3-mal osztva 1 maradékú, a másik 2 maradékú,
tehát $p_1 + p_2$ 3-nak többszöröse. ....2 pont
A $p_1 + 1$ páros, tehát p_1 és p_2 páratlan, azaz egyikük 4-gyel osztva
1, másikuk 3 maradékú, összegük tehát 4-gyel osztható. ....2 pont
Ha egy összeg 3-mal is és 4-gyel is osztható, akkor szorzatukkal 12-vel is. ....2 pont
Így az egyetlen jó pár a 3 ; 5. **összesen: 10 pont**

4. feladat: Egy iskolának három kórusa van, egy nagy, egy közepes és egy kicsi. A kicsi kórus tagjai benne vannak a másik két kórusban is, és a közepes kórus minden tagja énekel a nagy kórusban is. A közepes kórusban kétszer annyi fiú van, mint lány, és tudjuk, hogy minden nagy kórusbeli fiú énekel a közepes kórusban, viszont 15 nagy kórusbeli lány nem tagja a közepes kórusnak. A közepes kórus minden lány tagja énekel a kicsi kórusban is, viszont 45 nagy kórusbeli fiú nem tagja a kicsi kórusnak, amelynek ötször annyi lány tagja van, mint fiú. Hány lány és hány fiú tagja van a nagy kórusnak?

megoldás: Ha F a fiúk, L a lányok száma a nagy kórusban, akkor
a feltételek alapján egyrészt
$F = 2(L – 15)$ ....3 pont
másrészt
$L – 15 = 5(F – 45)$. ....3 pont

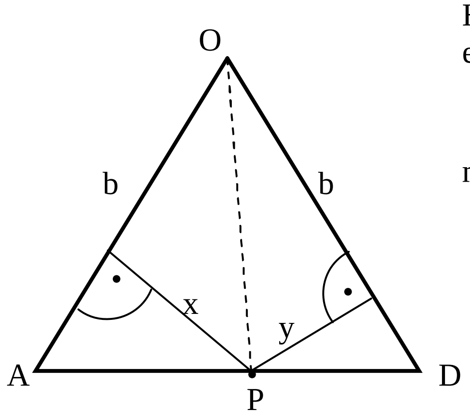
A kettőt egybevetve $F = 10(F – 45)$,
azaz
$F = 50$ és $L = 40$. ....3 pont

Ezek ki is elégítik a feltételeket. ....1 pont
összesen: 10 pont

Oktatási Minisztérium
Fejér Megyei Pedagógiai Szakmai és Szakszolgáltató Intézet

5. feladat: Az $ABCD$ téglalap ($AD > AB$) AD oldalának belső pontja P.
Mutassuk meg, hogy a P pontnak az átlóktól mért távolságainak összege akkora, mint az A csúcsnak a BD átlótól mért távolsága!

megoldás: A téglalap átlói egyenlő hosszúak és felezik egymást, tehát elég azt igazolni, hogy az egyenlő szárú háromszög alapjának bármely P pontjára, a két szártól mért távolság összege a szárhoz tartozó magasságot adja. ....2 pont



Ha a szárak hossza b, akkor a háromszög területe egyrészt

$$\frac{1}{2}xb + \frac{1}{2}yb = \frac{1}{2}b(x+y),$$ ....3 pont

másrészt viszont

$\frac{1}{2}bm_b$, ahol m_b a szárhoz tartozó ....3 pont

magasság. E kettőből

$$m_b = x + y$$

és ezt kellett bizonyítani. ....2 pont

összesen: 10 pont

Bármelyik feladat eredményének indoklás nélküli közlése 1 pontot ér. Több megoldásból csak egy (lehetőleg a jobbik) kaphat pontot. Az útmutatóban közöltektől eltérő, de kifogástalan indoklású megoldások egyenértékűek a bemutatott megoldásokkal. *Az elérhető maximális pontszám 50 pont.*

Az **I. kategóriába** tartozó versenyzők – akiknek a kötelező matematika óraszáma legfeljebb heti 4 óra – dolgozatainak továbbküldési ponthatára **25 pont.**

A továbbküldés nem feltétlenül jelent továbbjutást. A továbbjutáshoz szükséges ponthatárt a versenybizottság állapítja meg, s erről a megyei szervezők 2007. február végén értesítést kapnak.

Kérjük a kollégákat, hogy feltűnően írják rá a versenydolgozatokra, a tanuló neve mellé a megfelelő kategóriát!

Köszönjük a munkájukat!

Székesfehérvár, 2007. január

A Versenybizottság