Oktatási Minisztérium
Fejér Megyei Pedagógiai Szakmai és Szakszolgáltató Intézet

M/8

Varga Tamás matematikaverseny
8. osztály II. kategóriás feladatok megoldásai
megyei forduló 2007.

1. **feladat:** Egy réten 25 állat legel: háromszor annyi tehén, mint ló és kétszer annyi bárány, mint kecske. Hány ló legel a réten, ha volt közöttük deres is meg pej is?

Megoldás: A feltételek szerint

$T + L + B + K = 25,$ ....1 pont

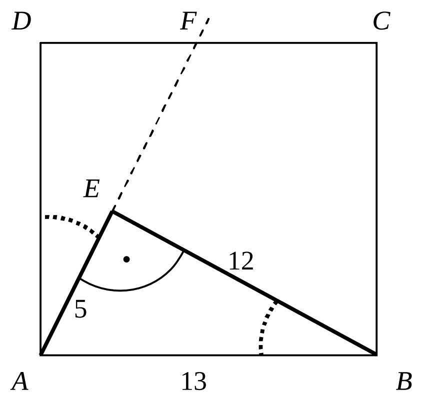
$T = 3L$ és $B = 2K$ miatt a fentiből

$4L + 3K = 25.$ ....2 pont

Mivel L és K pozitív egészek kell legyenek,
és így $2 \leq L \leq 6$ miatt ....2 pont
csak az $L = 4$ ad K-ra megoldást,
hiszen $3K = 25 - 4L = 21 - 3L + 4 - L$ -ből
a $4 - L$ 3-nak többszöröse kell legyen és $L > 1$. ....4 pont
Így 4 ló legel a réten. Ez valóban megoldás. ....1 pont

összesen: 10 pont

2. **feladat:**



Az *ABCD* 13 egységnyi oldalú négyzetbe, az ábra szerinti 5 és 12 egység befogójú derékszögű háromszöget rajzoltuk.

Az *AE* egyenes *F* –ben metszi a *CD* oldalt.

Mekkora az *FC* szakasz hossza?

megoldás: Az ABE és az AFD háromszögek hasonlók, mivel
2 – 2 szögük egyenlő. ($E_< = D_< = 90^o$ és $B_< = A_<$,
mert mindkettőt ugyanaz pótolja derékszöggé) ....3 pont
A megfelelő oldalak aránya egyenlő, vagyis

$5 : 12 = DF : 13,$ ....4 pont

ebből $DF = \frac{65}{12},$ ....2 pont

azaz $CF = 13 - \frac{65}{12} = \frac{91}{12}$ he. ....1 pont

összesen: 10 pont

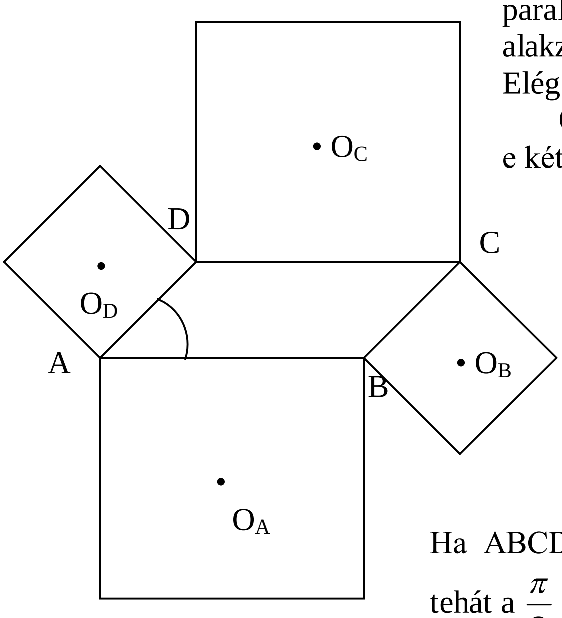
M/8

3. feladat: Egy urnában 10 darab, 1-től 10-ig megszámozott cédula van. Visszatevés nélkül, hármat találomra kiveszünk. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ezek közül a legnagyobb szám éppen 4-gyel nagyobb, mint a legkisebb?

Megoldás: A kihúzottak között a legkisebb csak az 1, 2, 3, 4, 5, 6
valamelyike lehet, ami számunkra kedvező, ...3 pont
ezért a legnagyobb, ami „jó” csak az 5, 6, 7, 8, 9, 10 lehet rendre. ....2 pont
Bármelyik ilyen „jó” pár között 3 egész van, így ....1 pont
a középső szám háromféle lehet, az összes
„jó” számhármas tehát $3 \cdot 6 = 18$. ....1 pont
Az összes eset $\binom{10}{3} = 120$, ...2 pont
a keresett valószínűség tehát $\frac{18}{120} = \frac{3}{20} = 0{,}15$. ....1 pont
összesen: 10 pont

4. feladat: Egy paralelogramma oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott négy négyzet négy középpontja egy négyzet négy csúcsa!

megoldás: A négy középpont egy paralelogramma négy csúcsa, hiszen ábránk az eredeti paralelogramma közepére szimmetrikus alakzat. ....2 pont
Elég tehát azt igazolnunk, hogy
O_AO_B merőleges O_AO_D –re és ....1 pont
e két szakasz egyenlő is. ....1 pont



Ha az eredeti négyszögünk téglalap, úgy igaz állításunk, mivel O_A, A, O_D illetve O_A, B, O_B kollineáris ponthármasok, mert a négyzet átlói felezik a négyzet szögeit és
így $O_AA \overset{\perp}{\text{és} =} O_AB$, továbbá
$AO_D \overset{\perp}{\text{és} =} BO_B$ –ből
$O_AO_D \overset{\perp}{\text{és} =} O_AO_B$ . ...2 pont
Ha ABCD nem téglalap, úgy feltehető, hogy $A_< < 90^o$,
tehát a $\frac{\pi}{2} < O_AAO_{D<} < \pi$ és $O_ABO_{B<} = O_AAO_{D<}$,
mert merőleges szárú tompaszögek. ....2 pont
Ha tehát az O_A pont körül -90^o-kal elforgatjuk az O_AAO_D háromszöget, A csúcs a B-be
és O_D az O_B –be kerül, azaz $O_AO_D \overset{\perp}{=} O_AO_B$ . ...2 pont
összesen: 10 pont

M/8

5. feladat: Az a, b és c olyan valós számok, amelyekre $abc = 1$ és $a + b + c > ab + ac + bc$. Igazoljuk, hogy az a, b, c számok legalább egyike nagyobb 1-nél!

megoldás: Mivel

$$a + b + c > ab + ac + bc$$

és

$$abc = 1,$$

a kettő összegéből

$$abc + a + b + c > ab + ac + bc + 1.$$ ....4 pont

A jobb oldalt 0-ra redukálva, elég azt megmutatni, hogy az

$$abc - ab - ac - bc + a + b + c - 1 > 0.$$ ....2 pont

A bal oldal háromtényezős szorzattá alakítható, vagyis elég az

$$(a - 1)(b - 1)(c - 1) > 0$$

relációt igazolni. ....3 pont
Ez pedig akkor és csak akkor teljesül, ha pontosan egy,
vagy mindhárom tényező pozitív. ....1 pont

összesen: 10 pont

Bármelyik feladat eredményének indoklás nélküli közlése 1 pontot ér. Több megoldásból csak egy (lehetőleg a jobbik) kaphat pontot. Az útmutatóban közöltektől eltérő, de kifogástalan indoklású megoldások egyenértékűek a bemutatott megoldásokkal. *Az elérhető maximális pontszám 50 pont.*

Az **II. kategóriába** tartozó versenyzők – akiknek a kötelező matematika óraszáma több mint heti 4 óra – dolgozatainak továbbküldési ponthatára **25 pont.**

A továbbküldés nem feltétlenül jelent továbbjutást. A továbbjutáshoz szükséges ponthatárt a versenybizottság állapítja meg, s erről a megyei szervezők 2007. február végén értesítést kapnak.

Kérjük a kollégákat, hogy feltűnően írják rá a versenydolgozatokra, a tanuló neve mellé a megfelelő kategóriát!

Köszönjük a munkájukat!

Székesfehérvár, 2007. január

A Versenybizottság