Oktatási Minisztérium
Hétvezér Általános Iskola, Székesfehérvár

M/8

Varga Tamás Matematikaverseny országos döntő 2008.

8. osztály I. kategória
megoldás

1. feladat: Oldjuk meg az alábbi egyenletet!

$$x(1 + |x|) = x + |x|$$

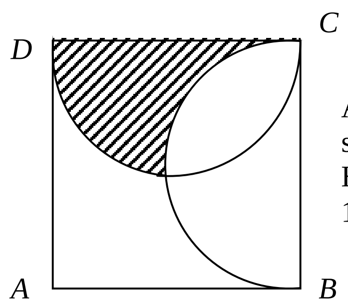
Megoldás: Szorzás és rendezés után

$$x \cdot |x| = |x|\text{, azaz}$$

$$|x| \cdot (x - 1) = 0 \text{ adódik.}$$

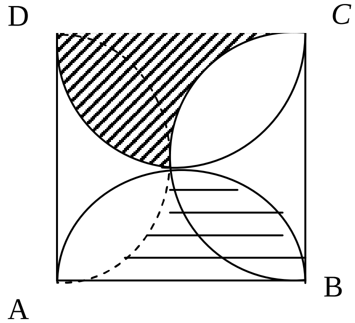
Ezekből $x = 0$ vagy $x = 1$.

2. feladat:



Az *ABCD* négyzet *BC* oldalára és *CD* oldalára rajzolt félkörök segítségével jelöltük ki az ábrán vonalkázott részt.
Hány cm^2 a vonalkázott rész területe, ha a négyzet oldala 12 cm hosszú ?

Megoldás:



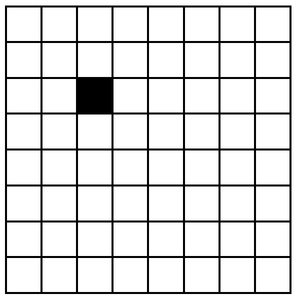
Megrajzolva az AB és AD fölé írt félköröket is a negyedrendű forgásszimmetria miatt

négy egybevágó síkidom egyesítése a négyzet,

ezért a vonalkázott rész területe a négyzet területének negyede,

azaz $\frac{12^2}{4} = 36\ cm^2$.

3. feladat:



Hány olyan, a jelölt mezőt nem tartalmazó négyzet van a mellékelt ábrán (négyzetrácson), amely négyzet oldalai illeszkednek az ábra megrajzolt vonalaira.

Megoldás: Az első két sor adta „sávban” 7 db 2 x 2-es, tehát a 7 ilyen sávban $7 \cdot 7 = 49$ ilyen négyzet lenne, azonban a jelzett mező 4 db 2 x 2-esben van benne, tehát 45 db megfelelő négyzet van.
3 x 3-as a három sorból álló sávban 6 db van, tehát $6 \cdot 6 = 36$ lenne, de a jelzett mező 9 db 3 x 3-as négyzetet kizár, vagyis $36 - 9 = 27$ „jó” négyzetünk van.
Hasonlóan nyerjük, hogy 4 x 4-esből $25 - 9 = 16$ és 5 x 5-ösből $16 - 9 = 7$ megfelelő négyzet van.
6 x 6-os, 7 x 7-es és 8 x 8-as nincs, ami jó lenne, tehát a 63 db 1 x 1-essel együtt 158 db négyzet „jó”.

4. feladat: Megadható-e

a) három szomszédos nem negatív egész szám,
b) hat szomszédos nem negatív egész szám,

úgy, hogy a számok négyzetének összege egyenlő egy egész szám négyzetével?

Megoldás:

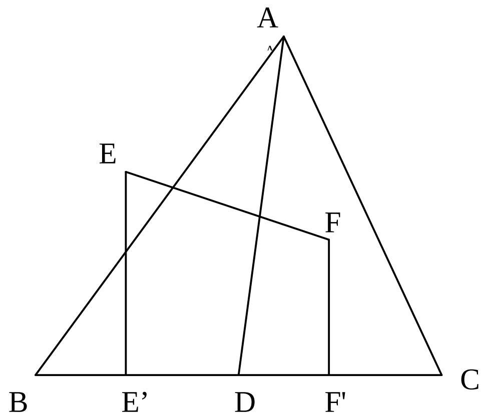
a) Legyen $a - 1$, a, $a + 1$ a három egymást követő egész.

$(a - 1)^2 + a^2 + (a + 1)^2 = 3a^2 + 2$ nem lehet négyzetszám, mert egy négyzetszám hármas maradéka 0 vagy 1.

b) Az $(a - 2)^2 + (a - 1)^2 + a^2 + (a + 1)^2 + (a + 2)^2 + (a + 3)^2 = 6a^2 + 6a + 19$, ami páratlan is.
Az $a \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ sorozatot nézve, a fenti kifejezés rendre a 19; 55; 91; 139; 199 értékeket adja, ami mind $4k + 3$ alakú.
Márpedig egy páratlan szám ($4k + 1$ alakú) négyzetének 4-es maradéka 1.
Tehát ez esetben sincs a feltételeket kielégítő szám.
A $6a^2 + 6a + 19 = 6(a + 1)a + 19 = 4B + 3$ alakú, hiszen $(a + 1)a$ páros!

M/8

5. feladat: Az *ABC* háromszög *BC* oldalának felezőpontja *D* pont. Az *ABD* háromszög köré írható kör középpontja *E*, míg az *ACD* háromszög köré írható kör középpontja *F* pont. Tudjuk, hogy *EF* = *BC*.
Mekkora az *EF* és *BC* egyenesek hajlásszöge?



Legyen E' ill. F' a BD ill. A DC felezőpontja. Ezért

$$E'F' = \frac{BC}{2}.$$

Az EF kétszerese ennek, tehát EF szakaszt FF' mentén F'-ig tolva olyan derékszögű háromszöget kapunk, melynek átfogója kétszerese az egyik befogónak. Ilyenről tudjuk, hogy e befogóval szemközti szög 30^{o} –os. Ennélfogva EF és BC hajlásszöge 60^{o}.

Mindegyik feladat hiánytalan megoldása 12 – 12 pontot ér.
A megszerezhető maximális pontszám 60 pont.

Oktatási Minisztérium
Hétvezér Általános Iskola, Székesfehérvár

Varga Tamás matematikaverseny országos döntő 2008.

8. osztály II. kategória

megoldás

1. feladat: Egy raktárban kétféle árut tárolnak. Az elsőből összesen A forint értékű, a másodikból összesen B forint értékű árujuk van. Ha az első árát p % -kal növelnék, a második árát p %-kal csökkentenék, akkor a raktár teljes készletének értéke 0,5 p %-kal nőne.

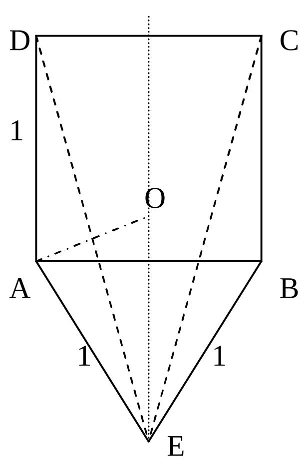
Határozzuk meg az $\frac{A}{B}$ arányt !

Megoldás: A feltételek szerint, ha az A Ft értékű termék értékét p %-kal növeljük, akkor értéke $A(1 + p/100)$ lesz.
Ugyanígy, a B értékű árát, ha p %-kal csökkentjük, akkor $B(1 – p/100)$ értékűvé válik.
A készlet értéke e műveletek után

$A(1 + p/100) + B(1 – p/100) = (A + B)(1 + 0{,}5p/100)$, amiből $\frac{A}{B} = 3$

2. feladat: Az $ABCD$ egységoldalú négyzet AB oldalára kifelé az AEB szabályos háromszöget írtuk. Mekkora a CDE háromszög köré írható kör sugara?

Megoldás:



A CDE kör közepe a CD felező merőlegesén van, amire E is illeszkedik mivel alakzatunk ezen egyenesre szimmetrik us.
AD = AE miatt a DE felező merőlegesén az A pont is, és egy füst alatt az EDC köré írt kör O közepe is rajta van.

Az $AED_{<} = 15^o$ $\left(\frac{180^o - (90^o + 60^o)}{2}\right)$, tehát AEOD rombusz és így a keresett sugár 1 egységnyi.

M/8

3. feladat: Egy ládában piros és kék golyók vannak. A golyóknak legalább a 90 % -a piros. Valaki kivett 50 golyót, és ezek között egy kék van. A többi golyót ki lehet úgy szedni, hogy minden nyolcadik golyó kék. Legfeljebb hány golyó lehetett eredetileg a ládában?

Megoldás:
Ha a ládában x darab kék golyó van, úgy

$$50 + 8(x - 1) + 7$$ golyónál több nem lehet a ládában.

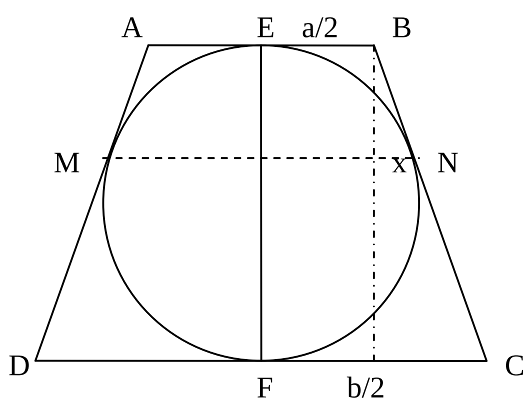
Mivel a kékek száma a fentiek 10 %-át nem haladhatja meg, így

$$x \le \frac{50+8(x-1)+7}{10}, \quad \text{azaz} \quad x \le 24{,}5.$$

Legfeljebb 24 kék van, és összesen 241-nél több golyó nincs.
Ez lehetséges, lévén 241 10 %-ánál kisebb a 24.

4. feladat: Az $ABCD$ húrtrapézban (szimmetrikus trapézban) AB párhuzamos CD – vel, és AB = a, CD = b hosszegység.
A trapézba kör írható, azaz van olyan kör, amely a trapéznak mind a négy oldalát érinti.
Mekkorák a trapéz BC, AD szárai?
Mekkora a trapéz magassága?
Számítsuk ki a beírt kör szárakon levő érintési pontjainak távolságát!

Megoldás:



A külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt

EB = BN = a/2 és
NC = CF = b/2,

Tehát AD = BC = $\frac{a+b}{2}$.

Az EF és BC adta derékszögű háromszögből

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = m^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2, \text{ azaz } m^2 = ab, \text{ tehát } m = \sqrt{ab}$$

MN = a + 2x és a hasonlóság (vagy párhuzamos szelők) miatt

$$x : \frac{b-a}{2} = \frac{a}{2} : \frac{a+b}{2}, \text{ tehát}$$

$$x = \frac{\frac{a}{2}\,\frac{b-a}{2}}{\frac{a+b}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{ab-a^2}{a+b}, \text{ így } 2x = \frac{ab-a^2}{a+b}, \text{ vagyis MN} = a + \frac{ab-a^2}{a+b} = \frac{2ab}{a+b}$$

$$\text{MN} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

M/8

5. feladat: Hány négyzetszám osztója van az $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 9! \cdot 10!$ szorzatnak? ($n!$ az első n darab pozitív egész szám szorzatát jelöli.)

Megoldás: A feladatbeli szorzat

$$2^{38} \cdot 3^{17} \cdot 5^{7} \cdot 7^{4}$$

A négyzetszám osztók prímtényezős felbontásában minden prímtényező páros kitevőn szerepel, azaz minden ilyen osztó

$$2^{2k} \cdot 3^{2l} \cdot 5^{2m} \cdot 7^{2n}$$

alakú, ahol $0 \le k \le 19$, $0 \le l \le 8$, $0 \le m \le 3$, $0 \le n \le 2$,

ami $20 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 3 = 2160$ lehetőséget, vagyis ennyi négyzetszám osztót ad.