M/8

Varga Tamás matematikaverseny
8. osztály I. kategóriás feladatok megoldásai
megyei forduló 2008.

1. feladat **Egy kecskenyájat (amelyben 15 kecske és 30 gida van) háromfelé kell osztani. A nyájban öt kecskének 1-1, ötnek 2-2 és ötnek 3-3 gidája van. Úgy tervezik, hogy mindhárom csoportban egyenlő számú kecske és egyenlő számú gida legyen, de egyetlen gidát sem választanak el az anyjától. Hogyan tehetik ezt meg?**

Megoldás: Csoportonként 10 gida és 5 kecske kell legyen. ....1 pont
A 3 – gidás kecskékből egy csoportba legfeljebb kettő kerülhet,
különben vagy több gida, vagy kevesebb kecske lenne itt. ....5 pont
Így egyetlen lehetőség van a 3 – gidások szétválasztásának

I. csoport	II. csoport	III. csoport	
2 kecske, 6 gida	**2 kecske, 6 gida**	**1 kecske, 3 gida**	............2 pont

A 2 – gidások ennél fogva az I. és II. csoportba csak egyesével juthatnak

1 kecske, 2 gida	**1 kecske, 2 gida**	**3 kecske, 6 gida**	.............2 pont

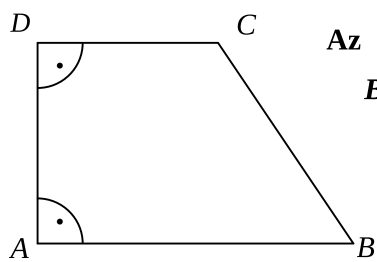
Végül az egykével bíró kecskék

2 kecske, 2 gida	**2 kecske, 2 gida**	**1 kecske, 1 gida**

elosztása adja az egyetlen megoldást. ....2 pont

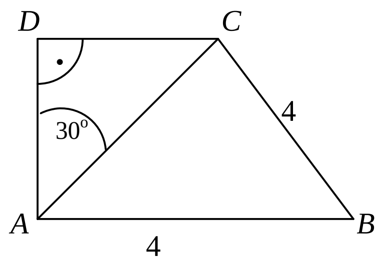
összesen: 12 pont

2. feladat



Az *ABCD* merőleges szárú trapéz *AB* alapja és *BC* szára egyaránt 4 cm hosszú.
Az *AC* átló 30^o –os szöget zár be az *AD* szárral.
Mekkora a *CD* oldala?

Megoldás:



Az ABC háromszög szabályos, mert
Az A-nál levő szöge
$90^o - 30^o = 60^o$ és ....3 pont
AB = BC miatt a $C_<$ = 60^o is teljesül. ....3 pont

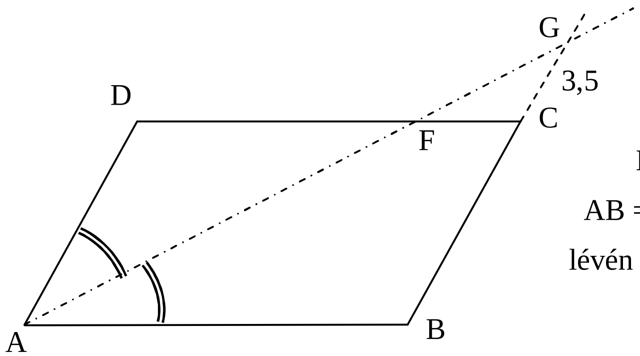
Az ADC derékszögű háromszögben így AC = 4 cm, ...3 pont
és a 30^o – os szöggel szemközti befogó – mint ismert – ennek fele,
azaz **CD = 2 cm**. ....3 pont

összesen: 12 pont

M/8

3. feladat **Az ABCD paralelogramma A csúcsából induló szögfelező a CD oldalt F pontban, a BC oldal C csúcson túli meghosszabbítását a G pontban metszi. A paralelogramma kerülete 39 cm, és a CG szakasz 3,5 cm hosszú. Mekkorák a paralelogramma oldalai?**

Megoldás: Az AFD$_<$ váltószöge a BAF$_<$ - nek, és ugyanígy az előbbinek a CFG$_<$ . ...3 pont



A CFG Δ-ben tehát

CF = FG = 3,5 cm. ....2 pont

Ha AB = a és AD = b, akkor

AB = a = CD = b + 3,5,

lévén AFD Δ is egyenlőszárú. ....4 pont

Mivel 2a + 2b = 2(b + 3,5) + 2b = 39, ezért

b = **8** **és** a = **11,5 cm** . ...3 pont

összesen: 12 pont

4. feladat **Határozzuk meg az összes olyan néggyel osztható $\overline{abcd}$ négyjegyű számot, amelyre teljesül az, hogy $\overline{bacd}$ osztható 7-tel, $\overline{acbd}$ osztható 5-tel és $\overline{abdc}$ 9-cel osztható!**

Megoldás: A 4-gyel való oszthatóság szabálya miatt bacd is osztható 4 -gyel. ....2 pont

Az 5-tel oszthatóság szabálya miatt bacd is 5-többszörös. ....2 pont

A 9-cel oszthatóság szabálya miatt bacd a 9 -nek is többszöröse. ....2 pont

Kaptuk tehát, hogy a bacd 4-gyel, 5-tel, 7-tel és 9-cel is osztható,

így ezek szorzatával 4 · 5 · 7 · 9 = 1260 -nal, mert

a felsoroltaknak nincs páronként sem 1 -nél nagyobb közös osztója. ....4 pont

A megoldáshalmaz {**2160; 5220; 7380; 3600; 5760; 8820**}. ....2 pont

összesen: 12 pont

5. feladat

Hányféleképpen írhatjuk az adott táblázatba az 1 -től 12-ig terjedő egészeket, ha azt akarjuk, hogy a táblázat minden oszlopában az összeg 13 és mindkét sorában az összeg 39 legyen?

Megoldás: 1. 2. 3. 4. 5. 6.
oszlop

						1. sor
						2. sor

Legyen az 1 az 1. sor 1. oszlopában,

akkor a 2. sorban a 12 kell legyen. ....1 pont

Az első sorban 38 hiányzik a sorösszegből

(míg a második sorban 27 a hiány).

A 38 tehát 4 páratlan és 1 páros, vagy 2 páratlan és 3 páros összege kell legyen. ....2 pont
A (10; 3) , (8; 5) , (6; 7) , (4; 9) és (2; 11) , párokból
a (10; 3) első tagja nem lehet az első sorban, mert
1 10 . . .
12 3 . . .
az első sor összegéből hiányzó 28 a maradék négy párból nem állítható elő :
8 + 6 + 4 + 2 = 20 kevés,
a tagokat párjukkal cserélve ki 5 + 7 + 9 + 11 = 32 sok,
tehát két tagot kell cserélni.
A 8 vagy a 2 nem lehet csere tárgya, mert az első 3 -mal csökkenti az összeget
és nincs 9-nél többet hozó csere, míg a másik csere 9-cel növel, de
ezzel együtt nincs 1-gyel csökkentő csere! ....5 pont

A 6 vagy 4 cseréje ugyanígy nem jön szóba. ....1 pont
1 3 . . .
12 10 . . .
A 2. sorban három páratlan nem lehet, mert a legkisebb összeg is ezekből 21.
Az öt páros összege 2 + 4 + 6 + 8 = 20, tehát csak a (8; 5) pár cseréje lehetséges. .....1 pont
Így

1	3	7	8	9	11
12	10	6	5	4	2

Jó elrendezés, és bármely más csak az oszlopok

vagy sorok cseréjével állhat elő.

$2 \cdot 6!$ = **1440-féleképpen** tölthető ki a táblázat. ...2 pont
összesen: 12 pont

(Ha a versenyző próbálgatással rátalál egy jó elrendezésre, de sem a sor, sem az oszlopcserével nem foglalkozott, legfeljebb 5 pont adható.)

Bármelyik feladat eredményének indoklás nélküli közlése 1 pontot ér. Több megoldásból csak egy (lehetőleg a jobbik) kaphat pontot. Az útmutatóban közöltektől eltérő, de kifogástalan indoklású megoldások egyenértékűek a bemutatott megoldásokkal. *Az elérhető maximális pontszám 60 pont.*

Az **I. kategóriába** tartozó versenyzők – akiknek a kötelező matematika óraszáma legfeljebb heti 4 óra – dolgozatainak továbbküldési ponthatára **30 pont.**

A továbbküldés nem feltétlenül jelent továbbjutást. A továbbjutáshoz szükséges ponthatárt a versenybizottság állapítja meg, s erről a megyei szervezők értesítést kapnak.

Kérjük a kollégákat, hogy feltűnően írják rá a versenydolgozatokra, a tanuló neve mellé a megfelelő kategóriát!

Köszönjük a munkájukat!

Székesfehérvár, 2008. március   A versenybizottság

Varga Tamás matematikaverseny
8. osztály II. kategóriás feladatok megoldásai
megyei forduló 2008.

1. feladat **Kata és Dóri középtávfutók, kör alakú pályán edzenek. Egyik alkalommal a pálya egyik átmérőjének két végpontjából egyszerre indulnak, és egymással szemben futnak. Az indulástól az első találkozásig Kata pontosan 100 métert tesz meg. Dóri az első és a második találkozás között 150 métert fut. A két lány sebességének nagysága mindvégig állandó.**
   a) Milyen hosszú a pálya?
   b) Számítsuk ki Kata és Dóri sebességének arányát!

Megoldás:

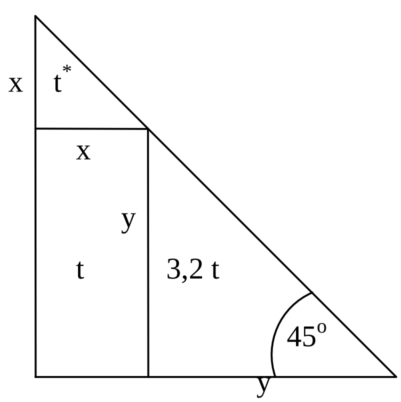
a) Az első találkozásig együtt a körpálya felét teszik meg. ....2 pont
Az első és a második találkozás között együtt egy teljes kört futnak be. ....2 pont
Ez azt jelenti, hogy fele annyi idő telik el az indulás és az első, mint
az első és második találkozás között. ....2 pont
Ez utóbbi esetben tehát Kata 200 métert futott. ....2 pont
Dóri ugyanakkor 150 métert, tehát a pálya 200 + 150 = **350 méter** hosszú. ....2 pont

c) Ugyanazon idő alatt 200 illetve 150 métert futottak,
ezért sebességük aránya 200 : 150 = **4 : 3**. ....2 pont

összesen: 12 pont

2. feladat **Egy egyenlőszárú derékszögű háromszög átfogójának egyik pontján áthaladó, a befogókkal párhuzamos egyenesek egy téglalapra és két kisebb háromszögre bontják az eredeti háromszöget. Az egyik kis háromszög területe 3,2 -szerese a téglalap területének. Hányszorosa a téglalap területe a másik kis háromszög területének?**

Megoldás:



Az ábra jelöléseivel:

$$\frac{y^2}{2} = 3{,}2\ t = 3{,}2\ xy,$$ ....5 pont

ebből

$$y = 6{,}4\ x .$$ ....2 pont

$$\frac{t}{t^*} = \frac{6{,}4\ x^2}{\frac{x^2}{2}} = \mathbf{12{,}8}.$$ ....5 pont

összesen: 12 pont

M/8

3. feladat **Oldjuk meg az alábbi egyenletet:**

$$\boldsymbol{ab + bc + cd + da = 1333,}$$

ha *a, b, c* és *d* mind prímszámok!

Megoldás: A bal oldal szorzattá bontható:

$(a + c)(b + d) = 1333.$ ....2 pont

Az 1333 törzstényezőkre bontva: $1333 = 31 \cdot 43.$ ....1 pont

Az $a + c$ és $b + d$ mindegyike páratlan, ezért mindkét tényező 1 – 1 tagja a 2. ....1 pont

Legyen $a = b = 2$, ezekkel $c = 29$ és $d = 41$. ....1 pont

Ha $a = 2$ és $d = 2$, akkor $c = 29$ és $b = 41$. ....1 pont

$b = 2$ és $c = 2$ -re : $a = 29$ és $d = 41$. ....1 pont

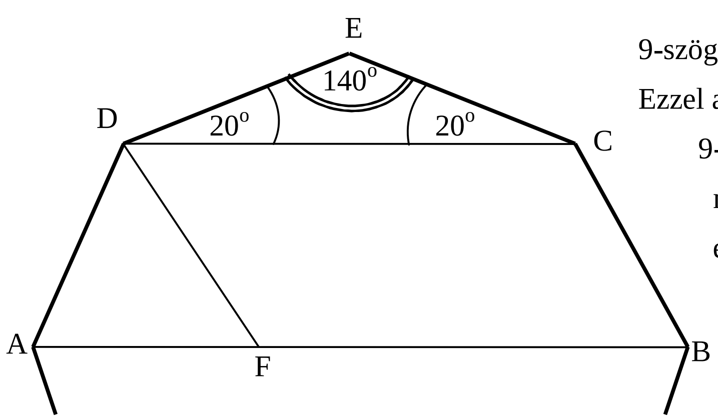
Végül $c = 2$ és $d = 2$ -re: $a = 29$ és $b = 41$. ....1 pont

Az $a + c = 43$ és $b + d = 31$ választás további 4 megoldást ad. ....1 + 1 + 1 + 1 pont

összesen: 12 pont

4. feladat **Mutassuk meg, hogy a szabályos 9-szög leghosszabb és legrövidebb átlója hosszának különbsége egyenlő a szabályos 9-szög oldalának hosszával!**

Megoldás: A szabályos n-szög egy szöge $\frac{n-2}{n} \cdot 180^o$, tehát



9-szögünk egyik szöge 140^o. ....2 pont

Ezzel a CED Δ –ben $C_< = D_< = 20^o$.

9-szögünk tengelyes szimmetriái miatt az AB és DC átlók egyrészt párhuzamosak, másrészt a két kívánt hosszúságú. ....2 pont

A D csúcson át, húzzunk párhuzamost BC –vel !

A BCDF paralelogramma, tehát $DF = BC$. .... 2 pont

E paralelogramma C –nél levő szöge $140^o - 20^o = 120^o$, ... 2pont

tehát $C_< = F_< = 120^o$ miatt az ADF Δ szabályos,

mert $AD = DF$ és $F_< = 60^o$. ....2 pont

Ezt kellett bizonyítanunk. ....2 pont

összesen: 12 pont

5. feladat **Melyik az a legnagyobb pozitív egész, amely nem írható fel 2008 darab összetett szám összegeként?**

Megoldás: A legkisebb összeg, ami 2008 darab összetett összegeként előáll:

$$(4k + (2008 – k)9 = 18072 -5k \geq 18072 – 5 \cdot 2008 = 8032)$$

$2008 \cdot 4 = 8032$. ....2 pont

Ha $n > 8032$ és n páros, akkor

$$n = \underbrace{4 + 4 + \ . \ . \ . + 4}_{\text{2007 db összetett}} + \underbrace{(n - 2007 \cdot 4)}_{\text{páros, de nem a 2 !}}$$

....3 pont

Ha $n > 8033$ és n páratlan, akkor

$$n = \underbrace{4 + 4 + \ . \ . \ . + 4}_{\text{2006 db összetett}} + 9 + \underbrace{(n - 2006 \cdot 4)}_{\text{páros, de ne legyen 2 !}}$$

....3 pont

Ha $n - 2006 \cdot 4 - 9 = 2$, akkor $n = 8035$. ....1 pont

A 8035 k darab páros és $(2008 - k)$ darab páratlan összetett összege

csak úgy lehet, ha a

$$4k + (2008 - k)9 = 8035,$$ ....2 pont

de nincs ilyen $k \in N$!

A keresett szám a 8035. ....1 pont

összesen: 12 pont

Bármelyik feladat eredményének indoklás nélküli közlése 1 pontot ér. Több megoldásból csak egy (lehetőleg a jobbik) kaphat pontot. Az útmutatóban közöltektől eltérő, de kifogástalan indoklású megoldások egyenértékűek a bemutatott megoldásokkal. *Az elérhető maximális pontszám 50 pont.*

Az **II. kategóriába** tartozó versenyzők – akiknek a kötelező matematika óraszáma több mint heti 4 óra – dolgozatainak továbbküldési ponthatára **30 pont.**

A továbbküldés nem feltétlenül jelent továbbjutást. A továbbjutáshoz szükséges ponthatárt a versenybizottság állapítja meg, s erről a megye i szervezők értesítést kapnak.

Kérjük a kollégákat, hogy feltűnően írják rá a versenydolgozatokra, a tanuló neve mellé a megfelelő kategóriát!

Köszönjük a munkájukat!

Székesfehérvár, 2008. március 11.

A Versenybizottság