Oktatási Minisztérium
Hétvezér Általános Iskola, Székesfehérvár

M/7

Varga Tamás Matematikaverseny megyei forduló 2008.
7. osztály I. kategória
Megoldások

1. feladat **A Zöld Vadon turistaszállóban egy csoport éppen a közös számlát fizeti. Mindenki 1200 Ft-ot adott, ám kiderült, hogy a költségből még 1200 Ft hiányzik. Erre mindenki ad még 100 Ft-ot. Így viszont a fizetendő összegnél már 4 % -kal több pénz gyűlik össze.**
Mennyi az egy főre eső költség?

Megoldás: Mindenki 1300 Ft-ot fizet, ...2 pont

ami 104 %-a az egy főre eső költségnek. ....2 pont

Így mindenkinél $x \cdot 1{,}04 = 1300$ Ft, ...5 pont

azaz $x = \dfrac{1300}{1{,}04} = \mathbf{1250}$ **Ft** az egy főre eső költség. ....2 pont

Ez valóban megoldás, mint könnyen ellenőrizhető. ....1 pont

Összesen:12 pont

2. feladat **Egy téglalap oldalai 18 és 24 cm hosszúak. Az egyik oldalát kétszer annyi cm-rel változtattuk meg, mint a másikat, és ekkor egy négyzetet kaptunk.**
Milyen hosszú lehet e négyzet oldala?

Megoldás: Négy eset lehetséges.
A rövidebbik oldalt növeljük 2x-szel
és a hosszabbat növelhetjük is, csökkenthetjük is x-szel.
Így
$18 + 2x = 24 + x$ vagy $18 + 2x = 24 - x$, ... 1 + 1 pont
azaz $x = 6$ vagy $x = 2$, ...1 + 1 pont
tehát a négyzet **30** **vagy** **22 cm** oldalú. ....1 + 1 pont

A hosszabbik oldalt csökkentjük 2x-szel
és a rövidebbet növeljük vagy csökkentjük x-szel,
tehát
$24 - 2x = 18 + x$ vagy $24 - 2x = 18 - x$, ...1 + 1 pont
amiből $x = 2$ vagy $x = 6$, ...1 + 1 pont
és így a négyzet oldala **20 vagy 12 cm** hosszú. ....1 + 1 pont
összesen: 12 pont

M/7

3. feladat **Egy diáknak hét jegye van matematikából. Ha felelne még egy 5-ösre, akkor jegyeinek átlaga 0,125-del nőne. Hány 4-ese lehet eddig, ha a két leggyengébb jegyének átlaga 2?**

Megoldás: Legyen a 7 jegy átlaga x, akkor a nyolc jegyé
x + 0,125,

azaz $8\cdot(x + 0{,}125) = 7x + 5$. ....3 pont
ebből $x = 4$, ...1 pont

A két leggyengébb jegyének összege 4, a hét jegy összege 28,
tehát öt jegyének összege 24. ....2 pont
Ebben csak közepesnél jobb jegyei lehetnek, hiszen
$3 + 4\cdot5 < 24$. ....2 pont
Csupa 5-ös nem lehet, mert $5\cdot5 = 25 > 24$. ....2 pont
Egyetlen 4-ese lehet, ...1 pont
és ez meg is valósulhat: pl. 2, 2, 4, 5, 5, 5, 5. ....1 pont
összesen: 12 pont

4. feladat **Bergengóciában az okos emberek 25%-a szép is. Tudjuk még, hogy a szép emberek közül minden második okos, viszont a lakosság negyede se nem okos, se nem szép. Bergengócia lakosságának hány százaléka okos is és szép is?**

Megoldás: Ha x az okosak, y a szépek száma,
akkor $\frac{x}{4}$ az okosak és szépek száma, és $x = 2y$, mert $\frac{y}{2} = \frac{x}{4}$ a feltétel szerint. ....3 pont
A $\frac{3}{4}$-nyi (75 %) lakos okos vagy szép,
tehát $x + y - \frac{x}{4} = x + \frac{x}{2} - \frac{x}{4} = \frac{5}{4}x$ ....3 pont
ad $\frac{3}{4}$-nyi lakost, azaz $\frac{5}{3}x$ a lakosok száma. ....3 pont
A keresett arány tehát

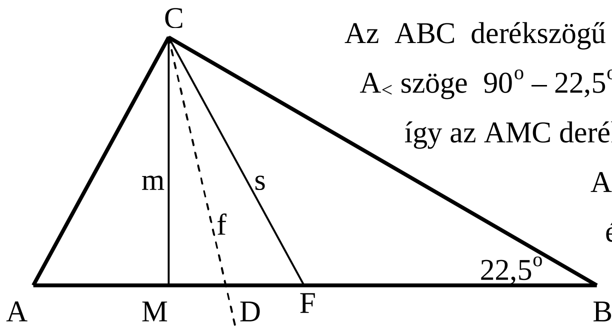
$$\frac{x}{4} : \frac{5}{3}x = \frac{3}{20} = \frac{15}{100} =$$

$= \mathbf{15\ \%}$. ....3 pont
összesen: 12 pont

M/7

5. feladat **Az *ABC* háromszög szögeinek az aránya 1 : 3 : 4, a legnagyobb szögű csúcs *C*.**
A *C*-ből induló szögfelezőt jelölje *f*, a *C*-ből induló magasságvonalat *m*, a *C* csúcsot a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakaszt, pedig *s* !
Igaz-e, hogy *f* felezi az *m* és *s* szakaszok által bezárt szöget?

Megoldás: $x + 3x + 4x = 180^o$, tehát a háromszög derékszögű
és egyik hegyesszöge $22{,}5^o$. ....2 pont



Az ABC derékszögű háromszög
$A_<$ szöge $90^o - 22{,}5^o = 67{,}5^o$, ...2 pont
így az AMC derékszögű háromszögben
$ACM_< = 22{,}5^o$, ...2 pont
és $ACD_< = 45^o$ lévén
$MCD_< = ACD_< - ACM_< = \mathbf{22{,}5^o}$. ....2 pont

Az eredeti derékszögű háromszög kiegészíthető téglalappá.
A téglalap átlói egyenlők és felezik egymást, tehát CF = FB és ezért
$CBF_< = BCF_< = 22{,}5^o$, amiből
$DCF_< = DCB_< - BCF_< = \mathbf{22{,}5^o}$. Tehát $MCD_< = DCF_<$ . ...4 pont

összesen: 12 pont

Bármelyik feladat eredményének indoklás nélküli közlése 1 pontot ér. Több megoldásból csak egy (lehetőleg a jobbik) kaphat pontot. Az útmutatóban közöltektől eltérő, de kifogástalan indokl ású megoldások egyenértékűek a bemutatott megoldásokkal. *Az elérhető maximális pontszám 60 pont.*

Az **I. kategóriába** tartozó versenyzők – akiknek a kötelező matematika óraszáma legfeljebb heti 4 óra – dolgozatainak továbbküldési ponthatára **30 pont.**

A továbbküldés nem feltétlenül jelent továbbjutást. A továbbjutáshoz szükséges ponthatárt a versenybizottság állapítja meg, s erről a megyei szervezők értesítést kapnak.

Kérjük a kollégákat, hogy feltűnően írják rá a versenydolgozatokra, a tanuló neve mellé a me gfelelő kategóriát!

Köszönjük a munkájukat!

Székesfehérvár, 2008. március

A Versenybizottság

M/7

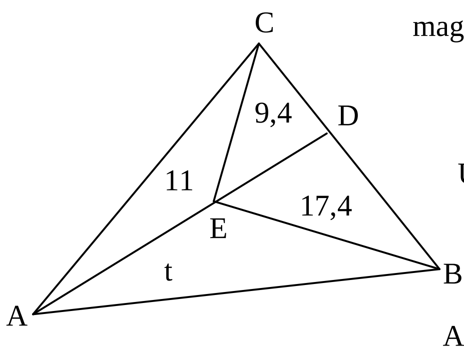
Varga Tamás Matematikaverseny megyei forduló 2008.
7. osztály II. kategória
Megoldások

1. feladat **Kovács úr minden hétköznap reggel pontban 8 órakor indul e l a házuk elől gépkocsival a munkahelyére. Ha 40 km/h átlagsebességgel halad, akkor 3 percet késik. Ha átlagsebessége 60 km/h, akkor 3 perccel a hivatalos munkakezdés előtt ér a munkahelyére.**
Mekkora átlagsebesség esetén lesz Kovács úr pontosan a munkakezdésre a munkahelyén?

Megoldás: Jelölje t a pontos érkezéshez szükséges időt órában mérve.
Mivel mindkét esetben az út ugyananakkora, ...2 pont
így $40(t+\frac{1}{20}) = 60(t-\frac{1}{20})$. ....3 pont
Ebből $t = \frac{1}{4}$ óra. ....2 pont
Helyettesítéssel a megtett távolság 12 km,
azaz az átlagsebesség **48 km/h.** ....3 pont
Ez valóban megoldás, amit ellenőriztünk. ....2 pont
összesen: 12 pont

2. feladat **Az *ABC* háromszög *BC* oldalának belső *D* pontját összekötöttük az *A* csúccsal, az *AD* szakasz belső *E* pontját a *B* és *C* csúcsokkal, így az eredeti háromszöget négy (kisebb) háromszögre bontottuk. Ha az *AEC* háromszög területe 11, a *BED* háromszögé 17,4 és a *DEC* háromszögé 9,4 területegység, akkor mekkora az *ABC* háromszög területe?**

Megoldás:



Az ACE és DCE háromszögek C-beli magassága közös, így

$$\frac{AE}{ED} = \frac{11}{9,4}.$$ ....4 pont

Ugyanígy

$$\frac{AE}{ED} = \frac{t}{17,4}$$ az

AD másik partjára támaszkodó háromszögekből. ......4 pont

Ezek szerint

$$t = \frac{11 \cdot 17,4}{9,4} = \approx 20,36$$ területegység. ....2 pont

Az ABC területe tehát **58,16 területegység**. ....2 pont
összesen: 12 pont

M/7

3. feladat **Egy étteremben a vacsora három fogásból áll: előétel, főétel, desszert. Az étlapon háromféle desszert van, a főételek száma pedig kétszer annyi, mint az előételek száma. Legalább hány főételnek kell az étlapon szerepelnie, ha egy vendég, aki 2008-ban (366 nap) minden este az étteremben akar vacsorázni, ne egyen kétszer ugyanolyan összetételű vacsorát?**

Megoldás: Ha a főételek száma n, akkor $\frac{n}{2}$ előétel van az étlapon, így

$3 \cdot n \cdot \frac{n}{2} = \frac{3n^2}{2}$-féleképpen rendelhet a vendég vacsorát. ....5 pont

$\frac{3n^2}{2} \geq 366$ akkor és csak akkor, ha $n^2 \geq 244$. ....3 pont

$n > 15$, hiszen $n^2 = 15^2 = 225 < 244$, ...2 pont

az $\mathbf{n \geq 16}$ viszont már megfelel, lévén $16^2 = 256$. ....2 pont

összesen: 12 pont

4. feladat **Hegyesszögű, derékszögű vagy tompaszögű az a háromszög, melyet fel lehet darabolni 2008 darab derékszögű háromszögre?**

Megoldás: A háromszög legnagyobb oldalához tartozó magasság a háromszöget két derékszögű háromszögre darabolja, mivel ezen az oldalon két hegyesszög van. ....4 pont

A derékszögű háromszöget pedig az átfogóhoz tartozó magasság darabolja a kívánt módon. ....4 pont

Így a derékszögű háromszögek számát mindig növelhetjük 1-gyel, azaz bármely háromszög feldarabolható 2008 darab derékszögűre. ....4 pont

összesen: 12 pont

M/7

5. feladat **50 különböző pozitív egész szám összege 2496. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük legalább két páros szám!**

Megoldás: Tegyük fel, hogy az 50 különböző pozitív egész egyike sem páros. ....5 pont

Ekkor az összeg legalább

$$1 + 3 + 5 + . . . + 99 = 2500 > 2496.$$ ....5 pont

Az összeg párossága miatt így legalább két páros szám tagja kell legyen, ...1 pont

és a 2496 valóban előállítható, ha pl. a fenti összegben négy páratlan helyett

a baloldali páros szomszédját írjuk. ....1 pont

összesen: 12 pont

Bármelyik feladat eredményének indoklás nélküli közlése 1 pontot ér. Több megoldásból csak egy (lehetőleg a jobbik) kaphat pontot. Az útmutatóban közöltektől eltérő, de kifogástalan indoklású megoldások egyenértékűek a bemutatott megoldásokkal. *Az elérhető maximális pontszám 60 pont.*

A **II. kategóriába** tartozó versenyzők – akiknek a kötelező matematika óraszáma több mint heti 4 óra – dolgozatainak továbbküldési ponthatára **30 pont.**

A továbbküldés nem feltétlenül jelent továbbjutást. A továbbjutáshoz szükséges ponthatárt a versenybizottság állapítja meg, s erről a megyei szervezők 2007. március első hetében értesítést kapnak.

Kérjük a kollégákat, hogy feltűnően írják rá a versenydolgozatokra, a tanuló neve mellé a megfelelő kategóriát!

Köszönjük a munkájukat!

Székesfehérvár, 2008. március

A Versenybizottság