Oktatási Minisztérium
Hétvezér Általános Iskola, Székesfehérvár

M/7

Varga Tamás Matematikaverseny országos döntő 2008.
7. osztály I. kategória
megoldások

1. feladat: Ha Dóri a tanév utolsó matematika dolgozatát 66 pontosra megírja, akkor a tanév során írt dolgozatainak átlaga 80 pont lesz, de ha csak 48 pontosra írja, akkor az összes dolgozatának pontátlaga 78 lesz. Hány matematika dolgozatot írt Dóri a tanév során?

Megoldás: Ha Dóri összesen n db dolgozatot írt, akkor az n – 1 db dolgozatára kapott p ponttal:
egyrészt $\frac{p+66}{n} = 80$, másrészt $\frac{p+48}{n} = 78$. E kettőből 18 = 2n, azaz n = 9.

2. feladat: Az *ABC* háromszög egy belső és egy külső szögének összege 244^{o},
és egyik belső szöge 80^{o}.
Mekkorák lehetnek a háromszög szögei?

Megoldás: jelölje a belső szögeket α, β, γ. Így $180^{o} - \alpha + \beta = 244^{o}$. Két eset lehetséges:
1. eset: $\beta = 80^{o}$, azaz $\alpha = 16^{o}$ és $\gamma = 84^{o}$.
2. eset: $\gamma = 80^{o}$, azaz $\alpha + \beta = 100^{o}$ és így $180^{o} - 2\alpha = 144^{o}$, tehát
$\alpha = 18^{o}$ és $\beta = 82^{o}$.

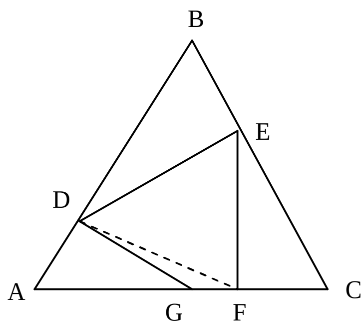
3. feladat: X és Y pozitív egész számok. Ha az $X \cdot 2007^{2008} + Y \cdot 2008^{2007}$ szám osztható 10-zel, akkor mennyi az X + Y összeg lehető legkisebb értéke?

Megoldás: Az összegnek utolsó jegye a 0 kell legyen. Az x páros kell legyen, különben a bal oldal páratlan. A 2007^{2008} utolsó jegye 1, a 2008^{2007} utolsó jegye 2,
tehát a (2;4), (4;3), (6;2) és (8;1) párokból jön a megoldás, mivel x ≥ 10-re x + y > 10 lenne.
A fentiek közül az x = 2, y = 4, azaz x + y = 6 a legkisebb összegű.

M/7

4. feladat: Az *ABC* szabályos háromszög *AC* oldalának felezőpontja *G*. Az *ABG* háromszög *G*-ből induló magassága *GD*. A *BCD* háromszög *D*-ből induló magassága *DE*. Az *ACE* háromszög *E*-ből induló magassága *EF*. (*D* az *AB* oldalon, *E* a *BC* oldalon és *F* az *AC* oldalon van.)
Az *ADF* háromszög területe hányad része az *ABC* háromszög területének?

Megoldás:



Az ADG, CEF, és BED mindegyike olyan derékszögű háromszög, amelyeknek van 30^{o}–os szöge, tehát az ezzel szemköztes befogó az átfogó fele.
Így, ha AB = AC = BC = a, akkor AD = AG / 2 = a / 4,
tehát BD = 3a / 4, azaz BE = 3a / 8.
Ennélfogva EC = 5a / 8, vagyis CF = 5a / 16,
s ebből AF = a – 5a / 16 = 11a / 16.
Az ADF háromszög D-beli magassága (fentiek miatt) ¼ -e
Az ABC háromszög magasságvonalának, tehát
$T_{ADF} = \frac{1}{2}\cdot\frac{11a}{16}\cdot\frac{m}{4} = \frac{11am}{128}$.

$T_{ABC} = \frac{1}{2}am$, azaz $\frac{11}{64}$ a keresett arány.

5. feladat: A 7. A osztály színházba megy. Anna, Béla, Cili, Dani, Elemér, és Fanni jegye egy sorba, hat szomszédos helyre szól. Béla Anna mellett szeretne ülni, Fanni viszont nem szeretne Elemér mellett ülni. Cili és Dani bármelyik osztálytársa mellett szívesen foglal helyet.
Hányféleképpen ülhet le a hat szomszédos helyre a hat tanuló, ha mindenkinek teljesül a kívánsága?

Megoldás: Az egymás mellett ülőket egy személynek tekintve a lehetséges ültetések száma:

$2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 240$, mivel az „egyszemélyes” pár kétféleképpen foglalhat helyet.

Ám ezen sorrendekben ott van a Fanni és Elemér pár „szomszédossága” is, ami a fenti gondolattal:

$4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$ sorrendet jelent.

Így $240 – 96 = 144$ ültetési sorrend tesz eleget mindenki kívánságának.

Mindegyik feladat hiánytalan megoldása 12 – 12 pontot ér.
A megszerezhető maximális pontszám 60 pont.

M/7

Varga Tamás Matematikaverseny országos döntő 2008.
7. osztály II. kategória
megoldások

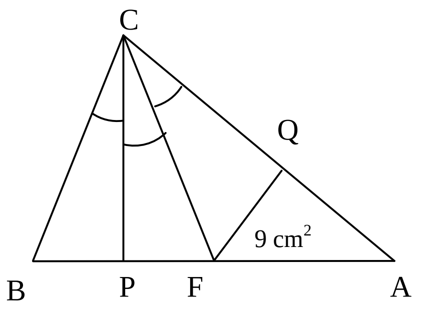
1. feladat: Hány olyan háromjegyű pozitív egész x szám van, amelyre az
$(x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3) \cdot (x + 4)$ szorzat osztható 11-gyel?

Megoldás: A 11-gyel való osztási maradékok alapján
11 akkor és csak akkor osztója a szorzatnak, ha x osztási maradéka 10, 9, 8 vagy 7.

A $11n + r$ ($r \in \{10; 9; 8; 7\}$) összegnek eleget kell tennie a
$100 \le 11n + r \le 999$ egyenlőtlenségnek.
Ez rendre a $9 \le n \le 89$ illetve $9 \le n \le 90$ (ez háromszor !)
relációnak kell eleget tegyen.
Összesen tehát $81 + 82 + 82 + 82 = 327$ darab háromjegyű tesz eleget a relációnak.

2. feladat: Az *ABC* háromszögben *AC* > *BC*. A *CF* súlyvonal (*F* az *AB* felezőpontja) és a *CP* magasságvonal az $ACB_<$ szöget három egyenlő részre osztja. Az *FQ* szakasz az *ACF* háromszög magassága. (*Q* az *AC* oldalon van.)
Számítsuk ki az *ABC* területét, ha tudjuk, hogy az *AFQ* háromszög területe 9 cm^2 !

Megoldás:



A CP – re való szimmetria miatt
BCP_Δ egybevágó CFP_Δ –gel, azaz egyenlő területűek.
A CF –re való szimmetria miatt
CFP_Δ egybevágó CFQ_Δ –gel, tehát e két háromszög területe is egyenlő.
Ám a $BCP_\Delta \cup CFP_\Delta = BFC_\Delta$ területe az AFC_Δ területével egyenlő, mivel alapjuk és ehhez tartozó magasságuk egyenlő.

Ezek szerint a fenti „részháromszögek” mindegyike 9 cm^2 területű, azaz $T_{ABC} = 36$ cm^2.

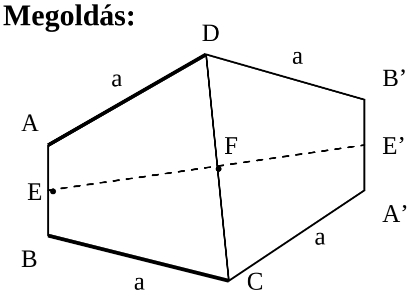
M/7

3. feladat: Bergengóciában a telefonszámok hétjegyűek, mégpedig úgy, hogy mind a hét jegy lehet a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek bármelyike. Az $\overline{abcdefg}$ telefonszám *könnyen megjegyezhető*, ha $\overline{abc} = \overline{def}$, vagy $\overline{abc} = \overline{efg}$ egyenlőségek közül legalább az egyik teljesül. ($\overline{abc}$ a telefonszám első három jegyéből álló legfeljebb háromjegyű szám, stb.)
Hány *könnyen megjegyezhető* telefonszám van Bergengóciában?

Megoldás: A telefonszám első három jegye $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ lehetőséget ad.
A feltételeget kielégítő $\overline{defg}$ $10^3 \cdot 10 + 10^3 \cdot 10 = 20\,000$ négyjegyűt ad,
melyekben az $\overline{abc} = \overline{def}$ és az $\overline{abc} = \overline{efg}$ egyszerre teljesül.
Ez pontosan akkor áll, ha $a = b = c = d = e = f = g$, ami 10 eset.
Könnyen megjegyezhető tehát 20 000 - 10 = 19 990 telefonszám.

4. feladat: Az $ABCD$ konvex négyszög két szemköztes oldala, AD és BC egyenlő hosszú. Bizonyítsuk be, hogy ha E az AB, F a CD oldalt felezi, akkor EF egybeesik vagy párhuzamos az AD és BC egyenesek egyik szimmetriatengelyével!

Megoldás:



Tükrözzük négyszögünket az F pontra!
A tükrözés miatt BAB'A' paralelogramma, mivel AB párhuzamos és egyenlő A'B' – vel.
E paralelogramma középvonala az EE',
tehát EE' párhuzamos és egyenlő AB' – vel.
A $B'DA_{\Delta}$ egyenlő szárú, vagyis EF egyenes az AD és DB' oldalakkal egyenlő szöget ad,
s ezért a DB' –vel párhuzamos BC –vel is.
Feltettük, hogy BC nem párhuzamos AD-vel.

Ha BC párhuzamos AD-vel, akkor a négyszögünk paralelogramma, melyben EF középvonal és erre szimmetrikus a két oldalegyenes.

5. feladat: Aladár és Béla hetesek. Az utolsó óra után a székeket rakják fel az asztalokra a teremben, ahol két sor asztal van és mind a két sorban ugyanannyi szék. Aladár az egyik, Béla a másik sor székeit szokta felrakni. Aladárnak 6 másodperccel kevesebb, Bélának 10 másodperccel több időre van szüksége ahhoz, hogy felrakja a saját sorának székeit, mint amennyi időre akkor lenne szükségük, ha az összes széket közösen rakva egyszerre végeznek. Mennyi idő alatt rakják fel külön -külön a fiúk saját soruk székeit?

Megoldás: Ha x sec. alatt végeznének a közös munka során, úgy Aladár x-6 s alatt végezne a külön munka során, tehát 1 s alatt a fele székek x-6 –od részét, x s alatt $\frac{x}{x-6}$ -od részével végezne.

Ugyanígy Béla a székek felének $\frac{x}{x+10}$ -ed részével végez, azaz

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x-6} + \frac{x}{x+10}\right) = 1, \text{ amiből } x = 30, \text{ és ezzel}$$

Aladár 24 s, Béla 40 s alatt rakná fel külön-külön a saját székeit.

Mindegyik feladat hiánytalan megoldása 12 – 12 pontot ér.
A megszerezhető maximális pontszám 60 pont.