M/8

Varga Tamás matematikaverseny
8. osztály I. kategóriás feladatok megoldásai
megyei forduló 2009.

1. feladat Melyik az a legkisebb természetes szám, amely 56-ra végződik, osztható 56-tal, és számjegyeinek összege is 56?

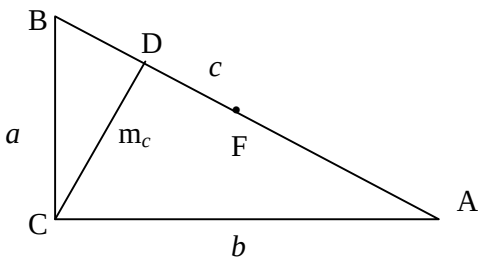
Megoldás:

A keresett szám akkor és csak akkor osztható 56-tal,
ha az utolsó két jegyet elhagyva nyert szám,
melynek jegyeinek összege 45 is osztható 56-tal. .....3 pont
A 45 jegyösszeg miatt egyrészt legalább 6-jegyű
és páros kell legyen az 56 többszöröse. .....2 pont
Ezek közül szóba jöhet a nagyság szerinti sorból a 199998, a
289998 és a 298998. ....3 pont
Ezek közül az utóbbi a keresett. ....2 pont

összesen: 10 pont

2. feladat Mekkorák a derékszögű háromszög szögei, ha három oldalának szorzata éppen kétszerese a három magasság szorzatának?

Megoldás:



A feltételek miatt

$abc = 2ab\mathrm{m}_c$, ...2 pont

azaz $c = 2\mathrm{m}_c$ . .....1 pont

Tudjuk, hogy az átfogó F felezőpontja a derékszögű csúcstól épen $\frac{c}{2}$ távolságra van

és így $\mathrm{m}_c \le \frac{c}{2}$,

hiszen a CDF háromszög befogója nem lehet nagyobb az átfogónál. .....4 pont
Az egyenlőség pedig csak akkor áll, ha $CF \perp AB$, ...2 pont
azaz CFA háromszög egyenlőszárú derékszögű,
tehát ABC háromszögünk szögei 45°, 45°, 90°. .....1 pont

összesen: 10 pont

3. feladat Határozzuk meg az x, y, z prímszámokat, ha

$$12x + 25y + 55z = 1050 \quad !$$

Megoldás:

Az összeg első tagja, a 12x 5-nek többszöröse kell legyen,
mivel a többiek mind ilyenek. .....2 pont
Az 5 prím lévén és 5 nem osztója 12-nek, tehát x = 5. .....1 pont
Ezt tudva, 5-tel egyszerűsítve

5y + 11z = 198. .....1 pont

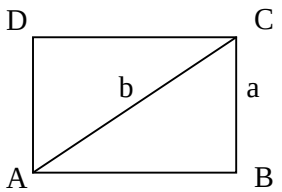
Most az 5y kell 11 többszöröse legyen, azaz y = 11 lehet csak. .....2 pont
Ezzel 11z = 143, vagyis z = 13. .....2 pont
Az x = 5, y = 11 és z = 13 valóban megoldás,
mert

$12 \cdot 5 + 25 \cdot 11 + 55 \cdot 13 = 1050$. .....2 pont

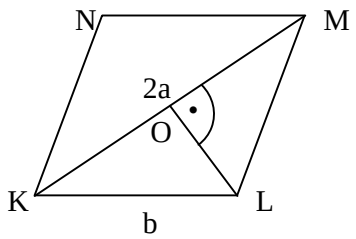
összesen: 10 pont

4. feladat Az *ABCD* téglalap egyik oldala fele olyan hosszú, mint a *KLMN* rombusz egyik átlója. A *KLMN* rombusz egyik oldala ugyanolyan hosszú, mint az *ABCD* téglalap egyik átlója. A *KLMN* rombusz területe 36 cm^2. Mekkora az *ABCD* téglalap területe?

Megoldás:



A rombusz átlói merőlegesen felezik egymást,
így a feltételekből az ABC és a KLO derékszögű
háromszögek egybevágósága adódik,
mivel 2 – 2 oldaluk és az oldalak közül a nagyobbal
szemben levő szögek egyenlők. .....5 pont



A rombuszt átlói 4 egyenlő területű háromszögre
darabolják, s ebből kettő kiadja a téglalapot, ...3 pont
tehát ABCD területe 18 cm^2. .....2 pont

összesen: 10pont

5. feladat Három szomszédos, pozitív egész összege négyzetszám is, meg egy pozitív egész harmadik hatványa is. Az ilyen tulajdonságú számhármasok közül, melyikben a legkisebb a három tag összege?

Megoldás:

Az $n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1)$

csak úgy lehet négyzetszám is, köbszám is, ha

$n + 1 = 3^5 \cdot k^6$, ahol $k \geq 1$ és egész. .....5 pont

A legkisebb összegűt nyilván a $k = 1$ adja, azaz

$n + 1 = 3^5$, $n = 242$ . ...3 pont

A $242 + 243 + 244 = 729 = 3^6$, ami valóban teljesíti a feltételeket. ....2 pont

összesen: 10 pont

Bármelyik feladat eredményének indoklás nélküli közlése 1 pontot ér. Több megoldásból csak egy (lehetőleg a jobbik) kaphat pontot. Az útmutatóban közöltektől eltérő, de kifogástalan indoklású megoldások egyenértékűek a bemutatott megoldásokkal. *Az elérhető maximális pontszám 50 pont.*

Az **I. kategóriába** tartozó versenyzők – akiknek a kötelező matematika óraszáma legfeljebb heti 4 óra – dolgozatainak továbbküldési ponthatára **25 pont.**

A továbbküldés nem feltétlenül jelent továbbjutást. A továbbjutáshoz szükséges ponthatárt a versenybizottság állapítja meg, s erről a megyei szervezők értesítést kapnak.

Kérjük a kollégákat, hogy feltűnően írják rá a versenydolgozatokra, a tanuló neve mellé a megfelelő kategóriát!

Köszönjük a munkájukat!

Székesfehérvár, 2009. január

A Versenybizottság

M/8

Varga Tamás matematikaverseny
8. osztály II. kategóriás feladatok megoldásai
megyei forduló 2009.

1. feladat Egy 15 000 Ft-os ruha árát p%-kal felemelték, majd az új árat kiárusításkor p%-kal csökkentették, s így 14 136 Ft lett a ruha ára. Hány %-os volt az áremelés-csökkenés?

Megoldás: A kétszeri árváltozással

$$a\left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 - \frac{p}{100}\right) = b\,. \quad \text{.....3 pont}$$

$$\frac{p^2}{100^2} = 1 - \frac{b}{a}\,, \quad \text{.....3 pont}$$

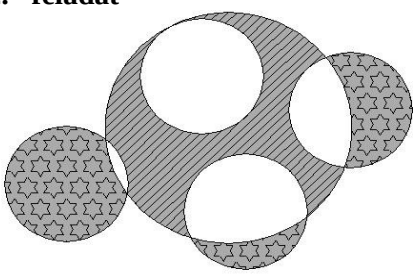
tehát $p = 100\sqrt{1-\frac{b}{a}}$ . .....2 pont

$b = 14136$, $a = 15\,000$ mellett $p = 24$. 1 pont

Ez valóban megoldás. ....1 pont

összesen: 10 pont

2. feladat



A 6 cm sugarú körlapnak négy darab 3 cm sugarú körlappal vannak közös pontjai az ábra szerint. Mutassuk meg, hogy a vonalkázott rész területe egyenlő a csillagokkal jelölt részek területének összegével!

Megoldás: Ha egy összegből összesen annyit veszek el, mint egyenként a tagjaiból és ezeket összegzem, úgy mindkét részt ugyanannyival csökkentettem. .....5 pont

A 6 cm sugarú kör területét a 4 darab 3 cm sugarú kör területének összege kiadja. ....5 pont

összesen: 10 pont

3. feladat Melyek azok a háromjegyű pozitív egészek, melyekben a számjegyek reciprokának az összege 1?

Megoldás: Ha $\overline{abc}$ a keresett szám és az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a \le b \le c$, akkor

$$\frac{1}{a} \ge \frac{1}{b} \ge \frac{1}{c}, \quad \text{.....1 pont}$$

azaz

$$\frac{3}{a} \ge \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1,$$

tehát $a \le 3$. .....1 pont

Mivel $a > 1$ kell legyen, így $a = 2$ vagy $a = 3$. .....1 pont

Ha $a = 2$, úgy az $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$ -ből

$bc - 2b - 2c + 4 = (b - 2)(c - 2) = 4$ .....1 pont

tehát $b - 2 = 1$ és $c - 2 = 4$, vagyis $b = 3$, $c = 6$ .....1 pont

vagy $b - 2 = c - 2 = 2$, és így $b = c = 4$. .....1 pont

Ha $a = 3$, úgy az $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2}{3}$ -ból

$2bc - 3b - 3c$ helyett a $4bc - 6b - 6c$ –t

vizsgálva a $(2b - 3)(2c - 3) = 9$ adódik .....1 pont

és ebből $a \le b \le c$ miatt csak a $b = c = 3$ nyerhető. .....1 pont

Így összesen 10 háromjegyű van permutálva az a, b, c jegyeket:

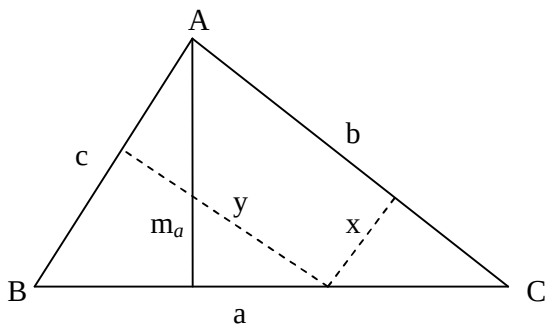
236, 263, 326, 362, 623, 632, 244, 424, 442 és a 333. ....2 pont

összesen: 10 pont

4. feladat Bizonyítsuk be, hogy a háromszög leghosszabb oldalához tartozó magasság nem hosszabb, mint ugyanezen az oldalon egy tetszőleges pontnak a másik két oldaltól való távolságának az összege!

Megoldás: Ha BC a leghosszabb oldal, úgy rajta 2 hegyesszög ül, ezért az idetartozó magasság talppontja a BC oldal belső pontja. .....2 pont

Ha a BC oldal egy tetszőleges pontja az AC-től x, míg AB-től y távolságra van, akkor az ABC kétszeres területére



$m_a \cdot a = x \cdot b + y \cdot c$. .....3 pont

ebből

$$m_a = x \cdot \frac{b}{a} + y \cdot \frac{c}{a}, \quad \text{.....1 pont}$$

s a lévén a legnagyobb oldal,

így $\frac{b}{a} \le 1$ és $\frac{c}{a} \le 1$

miatt $m_a \le x + y$ .....4 pont

és egyenlőség is csak akkor áll, ha mindenütt az áll, azaz

$a = c = b$, tehát a háromszög szabályos. ....1 pont

összesen: 10 pont

5. feladat Hány olyan hatjegyű pozitív egész szám van, melynek né gyzete három 4-esre végződik?

Megoldás: Egy kétténye zős szorzat utolsó három jegyét a tényezők utolsó három jegyének szorzata határozza meg, ezért $\overline{abc}^2 = \ldots 4$ csak úgy lehet, ha $c = 2$ vagy $c = 8$. .....1 pont
Ha $c = 2$, úgy $(10b + 2)^2 = 100b^2 + 40b + 4$ – ből $b = 1$ vagy 6, ...1 pont
ám $\overline{a12} = (100a + 12)^2 = 10\,000a^2 + 2400a + 144$ páratlan sok százast hoz! .....1 pont
Ha viszont $b = 6$, úgy $(100a + 62)^2 = 10\,000a^2 + 12\,400a + 3844$,
és ebből $a = 4$ vagy $a = 9$. .....1 pont
azaz 462 vagy 962 végűekből nyerhetők a kívántak. .....1 pont
Ha pedig $c = 8$, akkor a $(10b + 8)^2 = 100b^2 + 160b + 64$
miatt $b = 3$ vagy $b = 8$ kell legyen. ....1 pont
A $b = 8$ –ra $(100a + 88)^2 = 10\,000a^2 + 17600a + 7744$
páratlan sok százast hoz, ami zsákutca. .....1 pont
Ha $b = 3$, úgy $(100a + 38)^2 = 10\,000a^2 + 7600a + 1444$
miatt csak az $a = 0$ vagy az $a = 5$ ad nekünk megfelelőt. .....1 pont
A hatjegyű első három jegye 900-, az utolsó három jegye 4-féleképpen
választható, tehát $4 \cdot 900 = 3600$ „jó” számunk van. ....2 pont

összesen: 10 pont

Bármelyik feladat eredményének indoklás nélküli közlése 1 pontot ér. Több megoldásból csak egy (lehetőleg a jobbik) kaphat pontot. Az útmutatóban közöltektől eltérő, de kifogástalan indoklású megoldások egyenértékűek a bemutatott megoldásokkal. *Az elérhető maximális pontszám 50 pont.*

Az **II. kategóriába** tartozó versenyzők – akiknek a kötelező matematika óraszáma több mint heti 4 óra – dolgozatainak továbbküldési ponthatára **25 pont.**

A továbbküldés nem feltétlenül jelent továbbjutást. A továbbjutáshoz szükséges ponthatárt a versenybizottság állapítja meg, s erről a megye i szervezők értesítést kapnak.

Kérjük a kollégákat, hogy feltűnően írják rá a versenydolgozatokra, a tanuló neve mellé a megfelelő kategóriát!

Köszönjük a munkájukat!

Székesfehérvár, 2009. január

A Versenybizottság