# M/7

## Varga Tamás Matematikaverseny megyei forduló 2009.
## 7. osztály I. kategória
## Megoldások

**1. feladat:** Egy autókereskedő két használt kocsit adott el, mindegyiket 2,1 millió forintért. Az egyik kocsi 40%-os haszonnal, a másik 20%-os veszteséggel kelt el. E két kocsin összességében hány forint haszna volt a kereskedőnek?

**Megoldás:** Ha x Ft-ért vettük a haszonnal eladott autót, és y Ft-ért a veszteséggel elkeltet, akkor

$\frac{140}{100}x$ = 2 100 000, azaz x = 1 500 000 .....4 pont

és

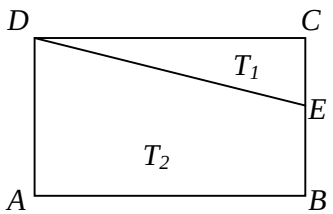
$\frac{80}{100}y$ = 2 100 000, vagyis y = 2 625 000. .....4 pont

Így hasznunk 4 200 000 – (1 500 000 + 2 625 000) = 75 000 Ft. .....1 pont

A szövegen ellenőrizhetjük, hogy ez valóban megoldás. ..... .....1 pont

**összesen: 10 pont**

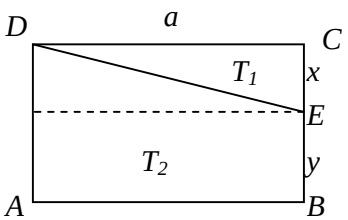
**2. feladat:**




Az *ABCD* négyszög téglalap.

Tudjuk, hogy a *CDE* háromszög és az *ABED* trapéz területének aránya 2 : 7. Mekkora a *CE* : *BE* arány?

**Megoldás:**




Az EDC háromszög területe $\frac{ax}{2}$ . .....1 pont

Az ABED trapéz területe $\frac{ax}{2} + ay$ .....1 pont

Ezzel egyrészt $\frac{\frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}+ay} = \frac{2}{7}$, .....3 pont

Másrészt rendezés és összevonás után $\frac{5ax}{2} = 2ay$, .....3 pont

amiből $\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$. ..... .....2 pont

**összesen: 10 pont**

**3. feladat:** ***a***, ***b*** és ***c*** három, párnként párhuzamos egyenes. Az ***a*** egyenesen kijelöltünk három, a *b* egyenesen négy és a ***c*** egyenesen öt pontot úgy, hogy ha három pont három különböző egyenesen van, akkor e három pont nincs egy egyenesen.
Hány olyan háromszög létezik, melynek minden csúcsa a kijelölt pontok közül való?

**Megoldás:** Négy esetet kell megvizsgálnunk aszerint, hogy a három csúcs három, vagy csak két egyenesről való. .....1 pont

a) Ha ***a***, ***b, c*** mindegyikéről 1-1 pont, úgy $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$; .....2 pont

b) ha az ***a***-ról van 2, úgy $3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 27$; .....2 pont

c) ha a ***b***-ről van 2, úgy $6 \cdot 3 + 6 \cdot 5 = 48$; .....2 pont

d) ha a ***c***-ről van 2, úgy $10 \cdot 3 + 10 \cdot 4 = 70$ .....2 pont

háromszög adódik. Összesen tehát 205 háromszög nyerhető a leírt módon. ..... .....1 pont

**összesen: 10 pont**

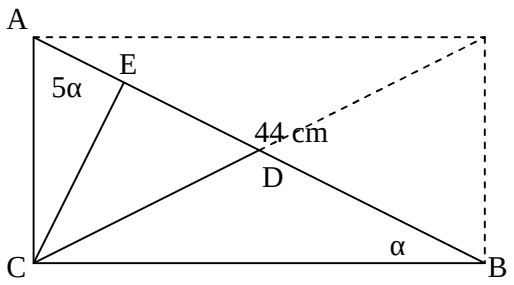
**4. feladat**: Mutassuk meg, hogy bármely négy pozitív páratlan szám között van kettő olyan, hogy az összegük, vagy a különbségük osztható 10-zel!

**Megoldás:** A páratlan számok utolsó jegyei az 1, 3, 5, 7 vagy 9 valamelyike. .....1 pont
Ha a négy kiválasztott között van 1 és 9(=10-1), vagy 3 és 7(=10-3) vagy két 5(=10-5), akkor ezek összege, .....4 pont
ha nincs ilyen pár, akkor a maradó 1 (vagy 10-1), 3 (vagy 10-3) és 5 (vagy 10-5) mellé negyediknek .....4 pont
csak ezek közül lehet választani, s így két azonos végű különbsége lesz a 10-nek többszöröse. .....1 pont

**összesen: 10 pont**

**5. feladat:** Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge ötször akkora, mint a másik hegyesszöge. Mekkora az átfogóhoz tartozó magasság, ha az átfogó 44 cm hosszú?

**Megoldás:**




Mivel $\alpha + 5\alpha = 90^o$, ezért a háromszög hegyesszögei $15^o$ és $75^0$. .....2 pont
Ha D az AB átfogó felezőpontja, akkor egyrészt CD = DB = 22 cm, mert a téglalap átlói egyenlők és felezik egymást. .....2 pont
Másrészt ACD egyenlőszárú, tehát $A_< = C_< = 75^o$ és $ADC_< = 30^o$. .....2 pont
A CDE derékszögű háromszögben van $30^o$-os szög, az ezzel szemben levő befogó a CD = 22 cm átfogó fele, azaz CE = 11 cm. ..... .....4 pont

**összesen: 10 pont**

Bármelyik feladat eredményének indoklás nélküli közlése 1 pontot ér. Több megoldásból csak egy (lehetőleg a jobbik) kaphat pontot. Az útmutatóban közöltektől eltérő, de kifogástalan indoklású megoldások egyenértékűek a bemutatott megoldásokkal. *Az elérhető maximális pontszám 50 pont.*

Az **I. kategóriába** tartozó versenyzők – akiknek a kötelező matematika óraszáma legfeljebb heti 4 óra – dolgozatainak továbbküldési ponthatára **25 pont.**

**A továbbküldés nem feltétlenül jelent továbbjutást.** A továbbjutáshoz szükséges ponthatárt a versenybizottság állapítja meg, s erről a megyei szervezők értesítést kapnak.

**Kérjük a kollégákat, hogy feltűnően írják rá a versenydolgozatokra, a tanuló neve mellé a megfelelő kategóriát!**

Köszönjük a munkájukat!

Székesfehérvár, 2009. január

A Versenybizottság

# M/7

## Varga Tamás Matematikaverseny megyei forduló 2009.
## 7. osztály II. kategória
## Megoldások

**1. feladat** Két iskola teniszcsapatai mérkőznek egymással. Mindkét iskola csapata 6 tanulóból áll. A viadalon csak páros mérkőzések vannak (2 tanuló alkotta páros játszik a másik iskola két tanulója adta páros ellen), de mindkét iskolának az összes lehetséges párosa játszik a másik iskola mindegyik, ilyen módon összeállított párosa ellen egy mérkőzést.

Összesen hány mérkőzést játszanak a viadal során?

Egy tanuló hányszor lép pályára?

**Megoldás:** Egy iskola 6 fős csapatából $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ páros alakítható ki, .....2 pont

így $15^2 = 225$ mérkőzés lesz összesen. .....2 pont

Minden mérkőzésen 4 játékos lép pályára,

így $4 \cdot 225 = 900$ az összes pályára lépés, .....2 pont

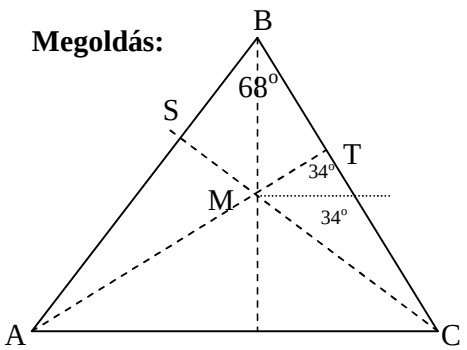
minden versenyző ugyanannyiszor játszik, ..... .....2 pont

mint egy másik, tehát $\frac{900}{12} = 75$ mérkőzést vív minden játékos. ..... .....2 pont

**összesen: 10 pont**

**2. feladat** Az *ABC* háromszögben az *ABC* szög $68^o$. Legyen *M* a magasságvonalak közös pontja és *T* az *A* csúcshoz tartozó magasság talppontja a *BC* egyenesen. A *TMC* szög szögfelezője párhuzamos az *AC* oldallal. Mekkorák az *ABC* háromszög szögei?

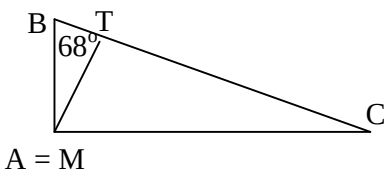
**Megoldás:**




Az MTC háromszög derékszögű, így $MCT_< = 22^o$,
mert a BCS háromszögben a $B_<$ pótszöge. .....1 pont
Az M-nél levő szögfelező tehát
két $34^o$-os szögre bont. ..... .....1 pont

Az $ACM_<$ az egyik ilyen $34^o$-os szög váltószöge,
tehát $ACB_< = 34^o + 22^o = 56^o$, .....1 pont
s ezzel $BAC_< = 180^o - 56^o - 68^o = 56^o$. .....3 pont

Ha az $ACB_< = 90^o$, úgy nincs $TCM_<$ .....2 pont




Ha a $BAC_< = 90^o$, a TMC szög szögfelezője
nem lehet párhuzamos AC-vel. .....1 pont

Végül, ha akár C-nél, akár B-nél tompaszög lenne, úgy
a $TMC_<$ felezője metszené AC-t, .....1 pont
nem lehet vele párhuzamos. **összesen:10 pont**

**3. feladat** Van-e négyzetszám a

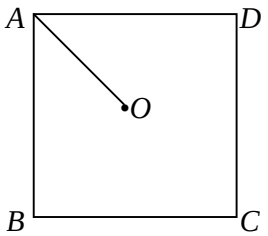
$$99;\ 999;\ 9999;\ldots;\ \underbrace{99\ldots99}_{n \text{ db } 9\text{-es}},\ \ldots$$

csupa 9-es számjegyekből álló számsorozat tagjai között?

**Megoldás:** A 9 végű négyzetszámok csak a 3 illetve a 7 végűek négyzetéből keletkeznek. .....2 pont
A $(10a + 3)^2 = 100a^2 + 60a + 9$ illetve a
$(10b + 7)^2 = 100b^2 + 140b + 49$ ..... .....2 + 2 pont
mindegyike páros tízest ad, .....2 p ont
nincs tehát 99 végű négyzetszám. ..... .....2 pont

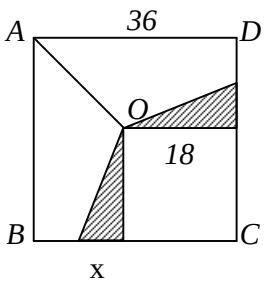
**összesen: 10 pont**

**4. feladat**




Az *ABCD* négyzet egy oldala 36 egységnyi. A négyzetet három szakasszal három egyenlő területű részre osztjuk úgy, hogy a négyzet *O* középpontjából az *A* csúcsba vezető *OA* szakasz két egyenlő területű rész közös határa.
Milyen messze van *C*-től a másik két szakasz *O*-tól különböző végpontja?

**Megoldás:**




Mivel $\frac{36^2}{3} = 36 \cdot 12 = 432$ területegység, .....1 pont
és ez AO átlóra való szimmetria .....2 pont
miatt a $\frac{36^2}{4}$-et kell két egybevágó derékszögű
háromszög területével növelni, mely ..... .....1 pont
derékszögű háromszög egyik befogója 18 egység. .....2 pont
Így $432 = 324 + 2 \cdot \frac{18 \cdot x}{2}$, .....1 pont
Amiből x = 6, .....1 pont
Tehát a C csúcstól 6 + 18 = 24 egységre van a vizsgált végpont. ..... .....2 pont

**összesen: 10 pont**

**5. feladat** Egy sorban 2008 db szám áll, melyeknek bármelyike a +1 vagy a –1. Mindegyik két szomszédos szám alá leírjuk a szorzatukat, ezáltal egy újabb számsorhoz jutunk, ami már csak 2007 darab számból áll. Az előbbi műveletet addig hajtjuk végre, míg egyetlen számból álló „sorhoz” nem jutunk.
Bizonyítsuk be, hogy ha az első sorban van –1-es, akkor a számsorokban legalább 2008 db –1-es lesz!

**Megoldás:** Ha a 2008 szám mindegyike a +1, akkor nincs -1 egyetlen sorban sem. .....1 pont
Ha a 2008 szám mindegyike a -1, úgy akkor ez a sor hozza a kívánt számú -1-et. .....1 pont
Legyen tehát a kiindulásul vett sorban +1 és -1 is.
Ha ezután minden sorban van -1, úgy van legalább 2008 db -1-esünk. .....2 pont
Ha nincs mindenütt -1, akkor – tegyük fel – a k-adik sor az első -1 mentes ($k \geq 2$). .....2 pont
Ez csak úgy lehet, ha a k-1 –edik sor minden eleme -1, míg az előtte levő
k-2 sor mindegyikében van legalább 1 – 1 darab -1, összesen tehát legalább
$2009 - (k - 1) + k - 2 = 2008$ db -1-esünk van. .....4 pont
**összesen: 10 pont**

Bármelyik feladat eredményének indoklás nélküli közlése 1 pontot ér. Töb b megoldásból csak egy (lehetőleg a jobbik) kaphat pontot. Az útmutatóban közöltektől eltérő, de kifogástalan indoklású megoldások egyenértékűek a bemutatott megoldásokkal. *Az elérhető maximális pontszám 50 pont.*

A **II. kategóriába** tartozó versenyzők – akiknek a kötelező matematika óraszáma több mint heti 4 óra – dolgozatainak továbbküldési ponthatára **25 pont.**

**A továbbküldés nem feltétlenül jelent továbbjutást.** A továbbjutáshoz szükséges ponthatárt a versenybizottság állapítja meg, s erről a megyei szervezők értesítést kapnak.

**Kérjük a kollégákat, hogy feltűnően írják rá a versenydolgozatokra, a tanuló neve mellé a megfelelő kategóriát!**

Köszönjük a munkájukat!

Székesfehérvár, 2009. január

A Versenybizottság