Oktatási Minisztérium
Hétvezér Általános Iskola, Székesfehérvár

M/8

Varga Tamás Matematikaverseny megyei forduló 2010.
8. osztály I. kategória
Megoldások

1. feladat **Egy társaság 7 csokoládés és 4 epres jégkrémet vásárolt, melyekért összesen 2695 Ft -ot fizettek. Ha 4 csokis és 7 epres jégkrémet vennének, akkor 2530 Ft -ot fizetnének. Mennyibe kerül 1 csokis illetve 1 epres jégkrém ?**

Megoldás: Ha 11 csokist és 11 eprest veszünk, akkor

2695 + 2530 = 5225 Ft-ot fizetünk, ... 2 pont

tehát 1 csokis és 1 epres együtt 5225 : 11 = 475 Ft. ....2 pont

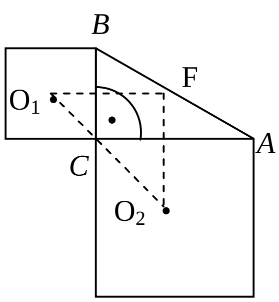
4 csokis és 4 epres így összesen 1900 Ft, ...2 pont

azaz 3 epres 2530 – 1900 = 630 Ft, ...2 pont

s ezzel 1 epres 210, míg 1 csokis 265 Ft-ba kerül. ....2 pont

összesen: 10 pont

2. feladat **Az *ABC* derékszögű háromszög mindkét befogójára, kifelé egy-egy négyzetet írtunk.**



Ha e négyzetek közepe O_1, O_2 és az AB átfogót az F pont felezi, Akkor az O_1O_2F háromszög szögei mekkorák ?

Megoldás: A négyzet átlói felezik a négyzet szögeit, ...1 pont

Ezért O_1CO_2 szög = $45^o + 90^o + 45^o = 180^o$, ...2 pont

azaz O_1, C és O_2 egy egyenesen vannak. ....1 pont

O_1F és O_2F középvonalak, így egyrészt merőlegesek egymásra, ...2 pont

másrészt $O_1F = \frac{BC}{2} + \frac{AC}{2}$ és $O_2F = \frac{AC}{2} + \frac{BC}{2}$ ....3 pont

A keresett szögek: 45^o, 45^o és 90^o. ....1 pont

összesen: 10 pont

M/8

3. feladat **Mennyit ad a** $\mathbf{2009 \cdot \underbrace{999\ldots99}_{\text{2009 db 9-es számjegy}}}$ **szorzat végeredményében a számjegyek összege ?**

Megoldás: Célszerű a szorzatot a

$$2009 \cdot (\underbrace{100\ldots00}_{\text{2009 darab 0}} - 1)$$

alakban vizsgálni. ....4 pont

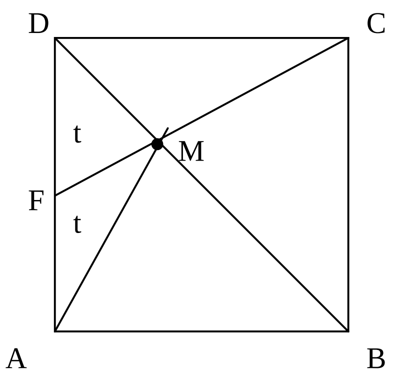
Így a szorzat $2008\underbrace{99\ldots9}_{\text{2005 db}}97991$ ....4 pont

tehát jegyeinek összege $2 + 8 + 9 \cdot 2005 + 7 + 18 + 1 = 18081$. ....2 pont

összesen: 10 pont

4. feladat **Az ABCD négyzet AD oldalának a felező pontja az F. A BD átlót a CF szakasz az M pontban metszi. Hány cm² az MDF háromszög területe, ha a négyzet területe** $17\frac{3}{7}$ **cm² ?**

Megoldás:



Az ábra jelöléseivel:
a DFM háromszög t területe egyenlő az AFM háromszög területével, mert alapjuk és az ehhez tartozó magasságok egyenlők. ....3 pont
A BD átlóra való tükrösség miatt
a CDM háromszög területe 2t, ...3 pont
tehát CDF háromszög területe 3t, ami a négyzet területének ¼-e. .... 2 pont

Ennélfogva $t = \dfrac{17\frac{3}{7}}{12} = \dfrac{122}{7 \cdot 12} = \dfrac{61}{42}$ cm². ....2 pont

összesen: 10 pont

M/8

5. feladat **Kata egy szabályos dobókockával többször dob, és minden dobás után feljegyzi a dobott pontok számát. A dobásokat akkor fejezi be, ha valamelyik pontszámot harmadszorra dobja ki. Egy alkalommal a 12. dobás után áll meg, és ekkor a dobott pontok összege 47. Melyik szám jött ki a 12. dobásra ?**

Megoldás: A 12. dobás előtt csakis az lehetett, hogy minden pontszámot,

egy kivételével, kétszer kidobott, ...4 pont

egyet pedig egyszer. Legyen ez az x. ....2 pont

A 11. dobás után az összeg

$$2\cdot(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) - x = 42 - x$$ ....2 pont

Mivel $x \geq 1$, ezért a 12. dobás csak a 6-os lehet, ...1 pont

mert az $x = 1$ kell legyen. ....1 pont

összesen: 10 pont

Bármelyik feladat eredményének indoklás nélküli közlése 1 pontot ér. Több megoldásból csak egy (lehetőleg a jobbik) kaphat pontot. Az útmutatóban közöltektől eltérő, de kifogástalan indoklású megoldások egyenértékűek a bemutatott megoldásokkal. *Az elérhető maximális pontszám 50 pont.*

Az **I. kategóriába** tartozó versenyzők – akiknek a kötelező matematika óraszáma legfeljebb heti 4 óra – dolgozatainak továbbküldési ponthatára **25 pont.**

A továbbküldés nem feltétlenül jelent továbbjutást. A továbbjutáshoz szükséges ponthatárt a versenybizottság állapítja meg, s erről a megyei szervezők értesítést kapnak.

Kérjük a kollégákat, hogy feltűnően írják rá a versenydolgozatokra, a tanuló neve mellé a megfelelő kategóriát!

Köszönjük a munkájukat!

Székesfehérvár, 2010. január

A Versenybizottság

M/8

Varga Tamás Matematikaverseny megyei forduló 2010.
8. osztály II. kategória
Megoldások

1. feladat **Egy kocka minden lapját két szín, sárga vagy zöld valamelyikére festjük. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha két színezés akkor különbözik, ha egyikből a másik forgatással nem kapható meg.**

Megoldás: Ha minden lapja azonos színű, az 2-féle lehet. ....2 pont

Ha egy lapjának színe különbözik a másik ötétől, az is 2-féleképpen lehet. ....2 pont

Ha két lap színe azonos és különbözik a másik négyétől,

ez színenként 2 – 2 lehetőség ....2 pont

aszerint, hogy a két lap szomszédos-e vagy átellenes. ....1 pont

Végül, ha 3 – 3 lap lesz sárga illetve zöld ez kétféleképpen valósulhat meg:

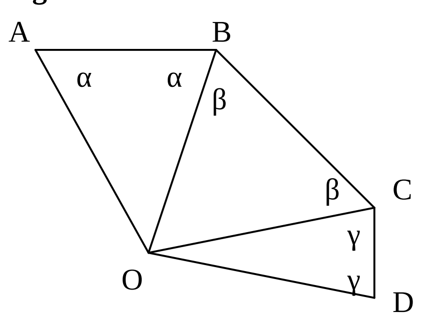
egy csúcsban találkozik a három azonos színű lap vagy sem.
....2 pont

Összesen tehát 10-féle színezés lehet. ....1 pont

összesen: 10 pont

2. feladat **határozzuk meg egy körbe írt nyolcszög négy olyan belső szögének az összegét, amelyek között nincs két szomszédos !**

Megoldás:



Kössük össze a kör O közepét a nyolcszög csúcsaival.

Így nyolc (nem feltétlenül egybevágó)

egyenlő szárú háromszöget kapunk. ....2 pont

A négy nem szomszédos szög

az így keletkezett alapokon fekvő

nyolcszor kettő darab egyenlők mindegyikéből

egyet – egyet tartalmaz. ....4 pont

Mivel a 8-szög szögeinek összege $(8 – 2)\pi = 6\pi$, ...2 pont

ezért a vizsgált 4 darab szög összege ennek fele: 3π. ....2 pont

összesen: 10 pont

M/8

3. feladat **Mely egész *a, b* számokra teljesül az alábbi egyenlőség ?**

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$$

Megoldás: 2ab-vel való szorzás után 0-ra rendezve az egyenletet, ...1 pont
majd mindkét oldalhoz – 4 -et adva ....1 pont
az (a – 2)(b + 2) = – 4 egyenletet kapjuk. ....1 pont
Mivel a bal oldali tényezők egészek, ...1 pont
ezért az alábbi táblázat adja a lehetséges megoldásokat:

a – 2	b + 2	a	b	
-1	4	1	2	.......................1 pont
-2	2	0 nem megoldás		.......................1 pont
-4	1	-2	-1	.......................1 pont
4	-1	6	-3	.......................1 pont
2	-2	4	-4	.......................1 pont
1	-4	3	-6	.......................1 pont

összesen: 10 pont

4. feladat **Egy 25 x 25 –ös táblázat minden mezejére 1-et vagy (-1)-et írunk. Ezután minden sorban és minden oszlopban az odaírt 25 számot összeszorozzuk.**
Lehet-e ennek az 50 számnak az összege
   a) 0,
   b) 10,
   c) 17 ?

Megoldás: Egy előjelváltás bármelyik mezőn, a megfelelő sor és oszlop 25 -25 elemének
szorzatát az ellentettjére változtatja. ....1 pont
Ha e két 25 tényezős szorzat azonos előjelű volt, akkor az 50 tagú összeg
4-gyel nő vagy csökken, ...2 pont
Ha ellentétes előjelűek voltak, akkor az összeg
nem változik. ....3 pont
Induljunk ki a mindenütt +1 -et tartalmazó táblázatból.
Erre a vizsgált összeg 50. ....1 pont
Mivel ezt az összeget csakis 4 többszöröseivel lehet a fentiek miatt apasztani, ...1 pont
így az a) és c) összeg elérhetetlen, ...1 pont
míg a b) igen, pl. a főátló 10 elemével. ....1 pont

összesen: 10 pont

M/8

5. feladat **Melyek azok a p prímszámok, amelyre a $4p^2 + 1$ és a $6p^2 + 1$ is prímek ?**

Megoldás: p = 2 nem lehet, különben $6 \cdot 2^2 + 1$ összetett szám. ....2 pont

Páratlan szám négyzetének utolsó jegye 1, 9 vagy 5. ....2 pont

Az előbbi kettővel

a $4p^2 + 1$ illetve a $6p^2 + 1$ 5-tel osztható összetett szám lesz. ....3 pont

Marad tehát az 5 végű p prím, azaz a p = 5. ....1 pont

Ez meg is felel, mivel

$p = 5;\quad 4p^2 + 1 = 101$ és $6p^2 + 1 = 151$

mindegyike prím. ....2 pont

összesen: 10 pont

Bármelyik feladat eredményének indoklás nélküli közlése 1 pontot ér. Több megoldásból csak egy (lehetőleg a jobbik) kaphat pontot. Az útmutatóban közöltektől eltérő, de kifogástalan indoklású megoldások egyenértékűek a bemutatott megoldásokkal. *Az elérhető maximális pontszám 50 pont.*

A **II. kategóriába** tartozó versenyzők – akiknek a kötelező matematika óraszáma több mint heti 4 óra – dolgozatainak továbbküldési ponthatára **25 pont.**

A továbbküldés nem feltétlenül jelent továbbjutást. A továbbjutáshoz szükséges ponthatárt a versenybizottság állapítja meg, s erről a megyei szer vezők értesítést kapnak.

Kérjük a kollégákat, hogy feltűnően írják rá a versenydolgozatokra, a tanuló neve mellé a megfelelő kategóriát!

Köszönjük a munkájukat!

Székesfehérvár, 2010. január

A Versenybizottság