Oktatási Minisztérium
Hétvezér Általános Iskola, Székesfehérvár

M/7

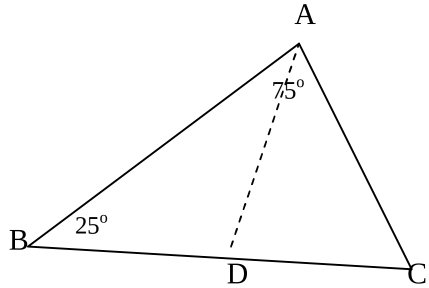
Varga Tamás Matematikaverseny megyei forduló 2010.
7. osztály I. kategória
Megoldások

1. feladat **Egy feltaláló három újításával autójának benzinfogyasztását először 30 % -kal, ezt követően a fogyasztást 45 %-kal, végül harmadjára további 25 %-kal tudta csökkenteni. Hány százalékos lesz autójának a megtakarítások utáni összfogyasztása ?**

Megoldás: az összfogyasztás az első újítás után az eredeti 70 % -a, ...3 pont
a második újítással a 70 %-nak az 55 %-a lesz, ...3 pont
végül az utolsó újítással $0{,}70 \cdot 0{,}55 \cdot 0{,}75 = 28{,}875$ %-os lesz. ....4 pont
összesen: 10 pont

2. feladat **Az *ABC* háromszögben az *ABC* szög 25^o-os, a *CAB* szög 75^o-os. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög két egyenlő szárú háromszögre vágható!**

Megoldás:



Az ábra jelöléseivel:
ha BAD szög = 25^o, akkor az ABD háromszög egyenlő szárú. ....5 pont

Az ACB szög = $180^o - 25^o - 75^o = 80^o$ miatt,
a CAD háromszögben két 50^o-os szög van,
Tehát ez a háromszög is egyenlő szárú. ....5 pont
összesen: 10 pont

M/7

3. feladat **Az alábbi számháromszög minden sorában, az ott található számokat szorozzuk össze (az első sorban a szorzat: 1), és a soronként így kapott szorzatokat az első sorral kezdve adjuk össze!**

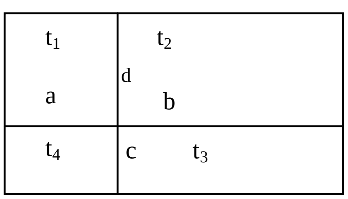
1
2 3
4 5 6
7 8 9 10
11 12 13 14 15
16 17 18 19 20 21

A 7., 8., stb. sorokban 7, 8, stb. egymást követő pozitív egész szám áll.
Van-e olyan sor, hogy az addig kapott szorzatokat összeadva 1-nél nagyobb négyzetszámot kapunk?
(Négyzetszám: egész szám négyzete.)

Megoldás: Az első három sorral a szorzatösszeg 1 + 6 + 120 = 127, ...2 pont
minden további sor pedig szorzatként 10-nek többszörösét adja,
hiszen minden ilyen sorban van páros és 5-tel osztható. ....3 pont
Vagyis bármely, a 2-nél nem kisebb sorszámú sorral
7 végű számot kapunk, amire négyzetszám nem végződhet. ....4 pont
Nincs tehát a feladatban megkívánt sor. ....1 pont
összesen:10 pont

4. feladat **Egy téglalapot oldalaival párhuzamos egy-egy egyenessel négy téglalapra vágtunk. A kapott négy téglalap közül kettőnek a területe 100 illetve 24 cm², a másik két téglalap területének aránya 2 : 3. Mekkora az eredeti téglalap területe?**

Megoldás:

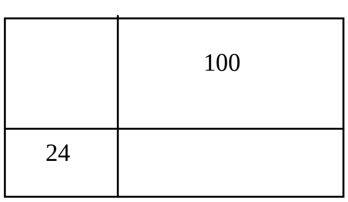


Az ábra jelöléseivel:

$t_1 = ad$, $t_2 = bd$, $t_3 = bc$, $t_4 = ac$,

azaz $t_1 \cdot t_3 = t_2 \cdot t_4$,...4 pont

következésképpen a megadott területű két téglalap nem lehet szomszédos, hiszen $\frac{100}{24} \neq \frac{3}{2}$. ....2 pont



Így $100 \cdot 24 = 2x \cdot 3x$ ....2 pont

vagyis $x = 20$. ....1 pont

Tehát az eredeti téglalap 224 cm² területű. ....1 pont
összesen: 10 pont

M/7

5. feladat **Hány olyan háromjegyű pozitív egész szám van, amelynek minden jegye páros és vannak a számnak egyforma számjegyei ?**

Megoldás: Az összes páros jegyekkel megadott háromjegyűek száma: $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$. ....4 pont

Ha minden jegye különböző, akkor $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ ilyen van. ....5 pont

Tehát $100 – 48 = 52$ darab kívánt tulajdonságú szám van. ....1 pont

összesen: 10 pont

Bármelyik feladat eredményének indoklás nélküli közlése 1 pontot ér. Több megoldásból csak egy (lehetőleg a jobbik) kaphat pontot. Az útmutatóban közöltektől eltérő, de kifogástalan indoklású megoldások egyenértékűek a bemutatott megoldásokkal. *Az elérhető maximális pontszám 50 pont.*

Az **I. kategóriába** tartozó versenyzők – akiknek a kötelező matematika óraszáma legfeljebb heti 4 óra – dolgozatainak továbbküldési ponthatára **25 pont.**

A továbbküldés nem feltétlenül jelent továbbjutást. A továbbjutáshoz szükséges ponthatárt a versenybizottság állapítja meg, s erről a megyei szervezők értesítést kapnak.

Kérjük a kollégákat, hogy feltűnően írják rá a versenydolgozatokra, a tanuló neve mellé a megfelelő kategóriát!

Köszönjük a munkájukat!

Székesfehérvár, 2010. január

A Versenybizottság

M/7

Varga Tamás Matematikaverseny megyei forduló 2010.
7. osztály II. kategória
Megoldások

1. feladat **Egy üzemben kétfajta szemeskávét pörkölnek. Az egyiknek 2500 Ft, a másiknak 3000 Ft kilogrammja. Milyen arányban keverjék a két fajtát, hogy a keverék kilogrammja pontosan 2700 Ft-ot érjen ?**

Megoldás: Ha x kg 2500 Ft-os kávét (1 – x) kg 3000 Ft-os kávéval keverünk
és így 1 kg 2700 Ft-ost kapunk..3 pont
akkor

$2500x + (1 - x)3000 = 2700$, ...1 pont

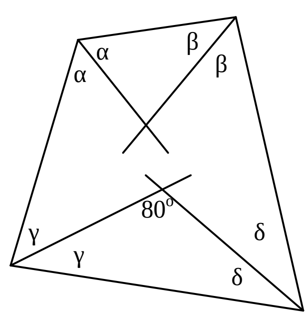
vagyis $300 = 500x$, tehát $x = \frac{3}{5}$ ....4 pont

Tehát 3 részt az olcsóból és 2 részt a drágábból,
ha 2700 Ft-ot kell kilójáért kapni. ....2 pont

összesen: 10 pont

2. feladat **Egy konvex négyszög két szomszédos csúcsából kiinduló belső szögfelező egyenesek 80°-os szöget zárnak be egymással. Mekkora szöget zár be egymással a négyszög másik két szögének belső szögfelező egyenese ? (Metsző egyenesek szöge, a keletkező csúcsszögek közül a nem nagyobbik.)**

Megoldás: A konvex négyszög szögeinek összege 360°. ....1 pont
A két szomszédos szög belső szögfelezője a fenti négyből kettőt felez,
és e felek együtt 100°-ot ....1 pont
vagy 80°-ot adnak. ....1 pont



Az első esetben a négyszög másik két szögének összege 160°, ...2 pont
ennek fele 80° méri egyúttal a másik két
(előbbiektől nem feltétlenül különböző) szögfelező szögét. ....1 pont

A második esetben felcserélődvén az előbbiekbeni
2 szomszéd szerepe ugyancsak 80° adódik. ....4 pont

összesen: 10 pont

3. feladat **Négyzetszám-e a**

$2010 + 2009^{2011}$ összeg?

Megoldás: A 2009 hatványainak utolsó két jegye rendre:

09; 81; 29; 61; 49; 41; 69; 21; 89; 01; 09; ....4 pont

vagyis tíz hosszúságú periódusban követik egymást, ...1 pont

tehát 2009^{2011} utolsó két jegye a 09 ....1 pont

az összeg pedig 19 végű lesz. ....1 pont

Mivel $(10a + 3)^2$ ill. $(10b + 7)^2$ adhat csak 9-re végződő négyzetszámot, ...2 pont

ám ezekben páros sok tízes lévén,

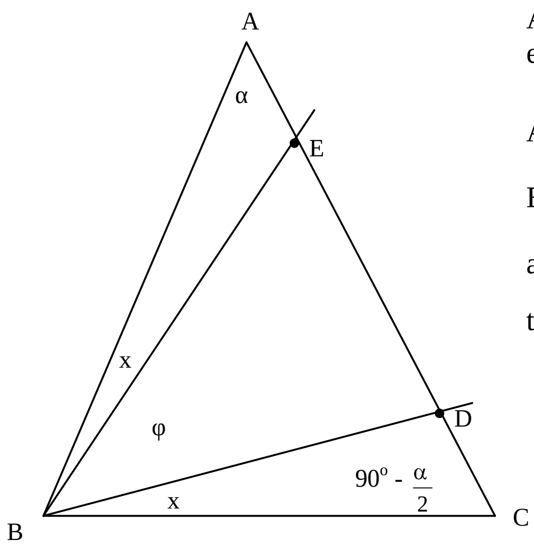
19-re nem végződhet négyzetszám, így összegünk sem lehet négyzetszám. ....1 pont

(Ha 4-es maradékkal indokol, úgy is jár az utolsó 3 pont)

összesen: 10 pont

4. feladat **Az *ABC* háromszögben *AB* = *AC*. Az *AC* száron úgy vettük fel a *D* és az *E* pontokat, hogy *AE* < *AD* továbbá *BD* = *DE* és *DBC* szög egyenlő *ABE* szöggel. Mekkora az *EBC* szög ?**

Megoldás: Ha α a szárszög, úgy az alapon fekvők $90^o - \frac{\alpha}{2}$ nagyságúak. ....1 pont



BD = DE feltétel miatt

EBD szög = BED szög = φ. ....1 pont

A BED szög az ABE háromszög külső szöge,

ezért $\varphi = x + \alpha$. ....3 pont

AB = AC miatt $\varphi + 2x = 90^o - \frac{\alpha}{2}$ ....1 pont

Ezekből $3x = 90^o - \frac{3\alpha}{2}$ ....1 pont

azaz $x = 30^o - \frac{\alpha}{2}$, ...2 pont

tehát

EBC szög = $\varphi + x = 2x + \alpha = 2(30^o - \frac{\alpha}{2}) + \alpha = 60^o$. ....1 pont

összesen: 10 pont

M/7

5. feladat **Az 1, 2, 3, 4 és 5 számok felhasználásával a következő sorozatot képezzük:**
1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, . . .
(1 db 1-es, 2 db 2-es, 3 db 3-as, 4 db 4-es, 5 db 5-ös, 6 db 1-es, 7 db 2-es, 8 db 3-as, 9 db 4-es, 10 db 5-ös, 11 db 1-es, stb)
Melyik szám a sorozat 500-adik tagja ?

Megoldás: Mivel $1 + 2 + 3 + \ldots + 29 + 30 + 31 = 16 \cdot 31 = 496$ ....4 pont

Ezért az 500 a 32-edik csoport tagja. ....2 pont

A $31 = 5 \cdot 6 + 1$, vagyis a 31. csoportban 31 darab 1-es, ...2 pont

ennélfogva a 32. csoportban 32 db 2-es van ....1 pont

az 500-adik elem ezért a 2. ....1 pont

összesen: 10 pont

Bármelyik feladat eredményének indoklás nélküli közlése 1 pontot ér. Több megoldásból csak egy (lehetőleg a jobbik) kaphat pontot. Az útmutatóban közöltektől eltérő, de kifogástalan indoklású megoldások egyenértékűek a bemutatott megoldásokkal. *Az elérhető maximális pontszám 50 pont.*

A **II. kategóriába** tartozó versenyzők – akiknek a kötelező matematika óraszáma több mint heti 4 óra – dolgozatainak továbbküldési ponthatára **25 pont.**

A továbbküldés nem feltétlenül jelent továbbjutást. A továbbjutáshoz szükséges ponthatárt a versenybizottság állapítja meg, s erről a megyei szervezők értesítést kapnak.

Kérjük a kollégákat, hogy feltűnően írják rá a versenydolgozatokra, a tanuló neve mellé a megfelelő kategóriát!

Köszönjük a munkájukat!

Székesfehérvár, 2010. január

A Versenybizottság