XI. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Sepsiszentgyörgy, 2002. márc. 16-20.

10. osztály

1. feladat: Egy körön adott 2002 pont, amelyek közül egyet megjelölünk A-val. Az adott pontokkal, mint csúcspontokkal megszerkesztjük az összes konvex sokszöget (háromszögeket, négyszögeket, ...).

a) Melyik sokszögből van több, azokból, amelyeknek az egyik csúcspontja az A, vagy azokból, amelyeknek egyik csúcspontja sem esik egybe az A ponttal?

b) Legyen P annak a valószínusége, hogy az összes konvex sokszög közül találomra kiválasztva egyet, annak az egyik csúcspontja az A. Bizonyítsuk be, hogy

$$\left|P-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2^{1981}}.$$

Szabó Magda (Szabadka)

2. feladat: Határozzuk meg az a paraméter azon értékeit, amelyekre

$$\sqrt{1+x^4}>1-2ax+x^2$$

egyenlőtlenség minden pozitív x-re teljesül.

Bogdán Zoltán (Cegléd)

3. feladat: Bizonyítsuk be, hogy minden ABC háromszögben érvényes a következő egyenlőtlenség:

$$4T(\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C)\geq ab+bc+ac,$$

ahol a, b, c a háromszög oldalainak hosszát, A, B, C a háromszög szögeinek nagyságát és T a háromszög területét jelenti.

Oláh György (Komárom)

4. feladat: Adott az $n\geq 2$ páratlan természetes szám. Határozzuk meg az

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-2}+\sqrt{n^2-1}}$$

szám egész részét.

Balázsi Borbála (Beregszász)

5. feladat: Az ABC háromszögben az AM, BN és CP összefutó egyenesek (egy ponton átmenő) (M a BC, N a CA és P az AB oldalon található). Legyen az AM és NP metszéspontja Q. Bizonyítsuk be, hogy, ha a $BQM\sphericalangle$ és $MQC\sphericalangle$ szögek egyenlők, akkor AM merőleges NP-re.

András Szilárd (Kolozsvár)

6. feladat: Egy négyzet alakú 100-szor 100-as táblázat minden mezőjébe egy pozitív egész számot írunk. Tudjuk, hogy bármely két szomszédos (közös oldallal rendelkező) mezőbe írt szám különbsége legfeljebb 10. Bizonyítsuk be, hogy van 6 olyan mező a táblázatban, amelyekbe azonos számokat írtunk.

Urbán János (Budapest)