XI. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Sepsiszentgyörgy, 2002. márc. 16-20.

11. osztály

1. feladat: Az

$$\frac{1}{2002}, \frac{2}{2001}, \frac{3}{2000}, \dots, \frac{2000}{3}, \frac{2001}{2}, \frac{2002}{1}$$

számok közül kiválasztható-e három úgy, hogy a kiválasztott három szám szorzata 1 legyen?

dr. Katz Sándor (Bonyhád)

2. feladat: Adott az $a > 1$ valós szám és az $f : (1, \infty) \longrightarrow \mathbb{N}$ függvény, úgy, hogy

$$a^{f(x)} \leq x < a^{f(x)+1}, \quad \forall x > 1.$$

Igazoljuk, hogy

$$f(xyz) \geq f(x) + f(y) + f(z), \quad \forall x, y, z > 1.$$

Bencze Mihály (Brassó)

3. feladat: Bizonyítsuk be, hogy minden tetraédernek van olyan csúcsa, amelyből induló három éléből háromszög szerkeszthető.

Kántor Sándor (Debrecen)

4. feladat: Határozzuk meg az összes olyan $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ szürjektív (amely minden természetes számot felvesz) függvényt, amelyre

$$f\left(10^{f(n)} + m\right) = f\left(10^n\right) + f(m), \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Bíró Béla (Sepsiszentgyörgy)

5. feladat: a) Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$2^{nx} + (n-1) \cdot 2 = \frac{2}{x}$$

egyenletet, ha $n \in \mathbb{N}^*$ rögzített természetes szám.

b) Határozzuk meg annak az $(x_n)_{n \geq 1}$ sorozatnak az általános tagját, amelynek a tagjai teljesítik

$$2^{x_1} + 2^{2x_2} + 2^{3x_3} + \ldots + 2^{nx_n} = \frac{2}{x_n}$$

egyenlőséget bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

Longáver Lajos (Nagybánya)

6. feladat: Egy lépés során az (a, b) természetes számpárt az $(a + 2b, b + 2a)$ számpárral helyettesítjük.

a) Határozzuk meg azokat a természetes számpárokat, amelyekből bizonyos számú lépés után a $(2002, 2003)$ számpárt kapjuk.

b) Adott a $p > 3$ prímszám. Bizonyítsuk be, hogy létezik egy olyan kezdeti (a, b) számpár, amelyre vagy az a vagy a b szám osztható p-vel és legalább $\dfrac{p+1}{2}$ lépés elvégzése után egy olyan számpárt kapunk, amelyben a két szám összege $2 \cdot 3^p$.

Bege Antal (Kolozsvár)