XI. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Sepsiszentgyörgy, 2002. márc. 16-20.

12. osztály

1. feladat: Tudjuk, hogy 1000 darab természetes szám reciprokának összege nagyobb mint 10. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük legalább két egyenlő szám.

Szabó Magda (Szabadka)

2. feladat: Az XOY derékszögű koordináta rendszerben adottak az $A\,(0, 51)$ és $B\,(78, 51)$ pontok. Létezik-e az OX tengelyen olyan M pont, melyre az MAB háromszög belsejében elhelyezkedő rácspontok száma pontosan 2002? (A rácspontok azon pontok melyek koordinátái egész számok.)

Kacsó Ferenc (Marosvásárhely)

3. feladat: Igazoljuk, hogy a $b_1, b_2, \ldots, b_m$ pozitív valós számok akkor és csakis akkor alkotnak mértani haladványt (mértani sorozatot), ha

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^2 b_{n-k+1}^2 = n b_1^2 b_n^2, \quad n \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Bencze Mihály (Brassó)

4. feladat: Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán a következő egyenletet

$$\left[\frac{x_1^2}{x_2 + x_3}\right] + \left[\frac{x_2^2}{x_3 + x_4}\right] + \cdots + \left[\frac{x_n^2}{x_1 + x_2}\right] = \left[\frac{n-1}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}\right],$$

ahol $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$ és $[x]$ az x szám egész részét jelöli.

Bencze Mihály (Brassó)

5. feladat: Legyenek az $x_1,\ x_2, \ldots, x_{11}$ tetszőleges egész számok. Az $a_1,\ a_2, \ldots, a_{11}$ számok a $\{-1, 0, 1\}$ halmazbeli értékeket vehetik fel, de úgy, hogy nem mind egyenlők 0-val. Igaz-e, hogy van olyan értéke az

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_{11} x_{11}$$

kifejezésnek, amely 2002-vel osztható?

Róka Sándor (Nyíregyháza)

6. feladat: Egy táblára felírtuk az egész számokat -6-tól 6-ig (13 számot). Egy lépésben két kiválasztott szám, a és b helyett felírhatjuk az

$$A = \frac{5a - 12b}{13} \text{ és } B = \frac{12a + 5b}{13}$$

számokat. Elérhetjük-e azt, hogy bizonyos számú lépés után 13 egyforma szám álljon a táblán?

dr. Katz Sándor (Bonyhád)